

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

- Définissez les angles d'Euler permettant de repérer la position d'un gyroscope dans l'espace et exprimez le vecteur de Poisson du gyroscope en fonction de ceux-ci.
- Établissez l'expression du couple extérieur à appliquer à un gyroscope pour produire un mouvement de précession uniforme autour de son centre d'inertie.
- Sur base du résultat établi en ii, décrivez et expliquez le mouvement du gyroscope illustrant la couverture de votre livre de Mécanique Rationnelle. Ce gyroscope est suspendu dans le champ de la pesanteur par une corde attachée à une extrémité de son axe de rotation initialement horizontal.



Question II

On considère le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace dans le champ de la pesanteur sur la surface intérieure d'une sphère fixe de rayon a décrite en coordonnées cylindriques (avec $\mathbf{e}_z$ dirigé verticalement vers le haut) par l'équation

$$r^2 + z^2 = a^2$$

La liaison entre le point matériel et la surface de guidage est supposée sans frottement et bilatérale.

À l'instant initial, le point matériel est situé à la hauteur $z = 0$ et est animé d'une vitesse non nulle $\mathbf{v}_0$ horizontale.

- Relevez toutes les forces agissant sur le point matériel en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
- Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel.
- Déterminez deux intégrales premières scalaires et précisez-en les interprétations physiques éventuelles.
- Montrez que le mouvement du point matériel peut être décrit au moyen de l'équation

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + (1 - \zeta^2)(\beta\zeta - 1) = -1$$

où on a introduit les variables sans dimension

$$\zeta = \frac{z}{a} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_0}{a} t$$

où $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ et où l'expression du nombre sans dimension β est à déterminer.

- Étudiez la nature du mouvement sur un diagramme de potentiel dans le cas où $\beta = 1$.

Question III

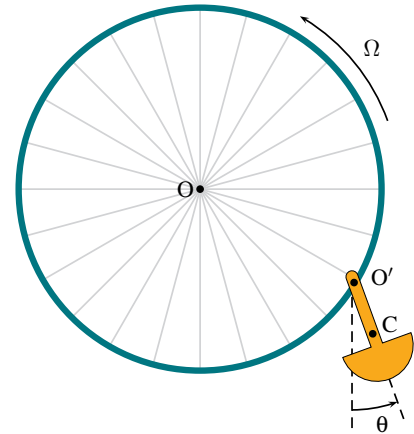
On considère le mouvement d'une grande roue, telle que celle qu'on peut voir sur la foire de Liège, et des nacelles qui lui sont attachées.

La roue de rayon a tourne dans un plan vertical à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe horizontal passant par son centre O . Des nacelles de masse m sont suspendues à la roue et peuvent osciller librement dans le plan vertical.

On étudie le mouvement plan d'une de ces nacelles dont le mouvement par rapport à la verticale est repéré par l'angle θ .

On note ℓ la distance entre le centre d'inertie C de la nacelle et son point d'attache O' située sur le pourtour extérieur de la roue.

On note J_C le moment d'inertie de la nacelle pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement passant par son centre d'inertie. À l'instant initial, la nacelle étudiée se trouve au point bas de la roue.



- i. Déterminez, en justifiant votre réponse, le nombre de degrés de liberté de la nacelle et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) appropriée(s) pour en décrire le mouvement.
- ii. Exprimez la vitesse absolue du centre d'inertie de la nacelle en fonction des coordonnées généralisées choisies.
- iii. Relevez les forces agissant sur la nacelle et donnez-en les caractéristiques principales (point d'application, direction, force conservative, force appliquée ou de liaison).
- iv. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement pour la nacelle.
- v. Écrivez* le théorème du moment cinétique pour la nacelle rapporté à son centre d'inertie. Précisez complètement le système d'axes par rapport auquel le mouvement de la nacelle est rapporté pour écrire ce théorème.
- vi. L'énergie de la nacelle est-elle conservée au cours du mouvement ? Justifiez.
- vii. Des résultats des points iv. et v., déduisez une équation différentielle du 2ème ordre pour la seule inconnue θ .
- viii. Dans le cas où la grande roue est fixe, montrez que l'équation obtenue en vii. se réduit à

$$\ddot{\theta} + \beta \sin \theta = 0$$

où la constante β est à déterminer.

- ix. Si la roue est fixe et que la nacelle est abandonnée sans vitesse en $\theta = \theta_0$, déterminez la loi du mouvement des petites oscillations de la nacelle autour de la position $\theta = 0$ ainsi que la période de ces oscillations.
- x. Comparez la période obtenue à celle d'un pendule simple de masse m et de longueur ℓ . Comment expliquez-vous la différence observée ?

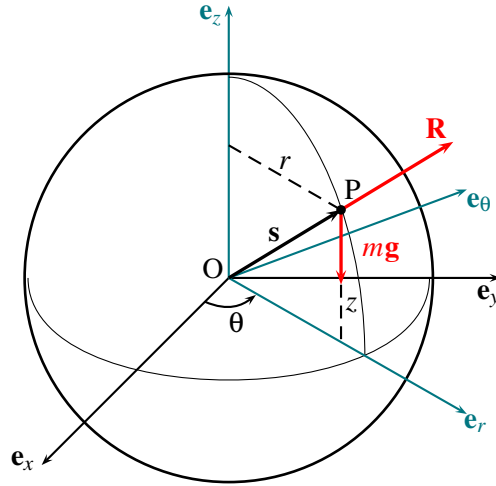
* Explicitiez les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème en fonction des coordonnées généralisées et des forces en jeu.

SOLUTION

Question I

Voir livre de référence

Question II



i. Les forces agissant sur le point sont :

- $mg = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative ;
- $\mathbf{R}$, force de liaison, perpendiculaire à la surface de guidage en l'absence de frottement.

La force de liaison normale n'a pas de composante tangentielle à la surface de guidage. Comme celle-ci est une surface de révolution autour de l'axe vertical, on a $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ en introduisant les axes de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$.

La force de liaison normale à la sphère est aussi parallèle au vecteur position de sorte que $\mathbf{s} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \quad (1)$$

iii. Multipliant scalairement l'équation (1) par la vitesse absolue du point P, on obtient

$$m\ddot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

puisque la vitesse, tangente à la surface, et la force de liaison, normale à la surface, sont perpendiculaires. On en tire l'intégrale première

$$\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = e$$

exprimant la conservation de l'énergie (par unité de masse) du point P.

En coordonnées cylindriques, on a

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

de sorte que l'intégrale première de conservation de l'énergie s'exprime sous la forme

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = 2e = v_0^2 \quad (2)$$

où la constante e a été déterminée en utilisant les conditions initiales $\|\dot{\mathbf{s}}\| = v_0$ et $z = 0$.

Afin d'obtenir une seconde intégrale première, on utilise le fait que la réaction $\mathbf{R}$ ne possède pas de composante selon $\mathbf{e}_\theta$. Puisque l'accélération en coordonnées cylindriques s'exprime par

$$\ddot{\mathbf{s}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

on a, en projetant l'équation (1) selon $\mathbf{e}_\theta$,

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

soit

$$r^2\dot{\theta} = h$$

où h est une constante qui peut être déterminée en utilisant les conditions initiales.

La vitesse initiale s'écrit en coordonnées cylindriques, en toute généralité,

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta + \dot{z}_0\mathbf{e}_z$$

Initialement, la vitesse est horizontale ($\dot{z}_0 = 0$) et donc, puisque

$$r^2 + z^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{a^2 - z^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -\frac{z\dot{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \quad (3)$$

on a aussi $\dot{r}_0 = 0$. La vitesse initiale peut alors s'écrire

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_0 \quad \Rightarrow \quad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

Utilisant ce résultat, ainsi que $z_0 = 0$ et donc $r_0 = a$, il vient

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0v_0 = av_0 \quad (4)$$

Remarque : On a supposé ici $\dot{\theta}_0 > 0$ de sorte que $\mathbf{v}_0 = \|\mathbf{v}_0\|\mathbf{e}_\theta = v_0\mathbf{e}_\theta$. Si $\dot{\theta}_0 < 0$, on aurait $h = -av_0$ ce qui est sans influence pour la suite puisque seul h^2 intervient dans les équations.

Cette intégrale première exprime la conservation de la composante verticale du moment cinétique (par unité de masse). On peut en effet vérifier que

$$(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = [(\mathbf{r}\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_z = r^2\dot{\theta}$$

De façon alternative, on peut obtenir la deuxième intégrale première scalaire en multipliant l'équation (1) successivement vectoriellement par $\mathbf{s}$ puis scalairement par $\mathbf{e}_z$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} m\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} &= m\mathbf{s} \wedge \mathbf{g} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{R} \\ &= m(\mathbf{r}\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (-g\mathbf{e}_z) = mgr\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

puis

$$m(\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z] = 0 \Rightarrow (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = h$$

qui exprime la conservation du moment cinétique vertical.

- iv. L'équation de la surface de guidage, voir (3), et l'équation (4) permettent d'éliminer les variables r et θ de l'équation (2). On obtient

$$\dot{z}^2 \left(1 + \frac{z^2}{a^2 - z^2} \right) + \frac{a^2 v_0^2}{a^2 - z^2} + 2gz = v_0^2$$

soit, en multipliant par $(a^2 - z^2)$,

$$a^2 \dot{z}^2 + (a^2 - z^2)(2gz - v_0^2) = -a^2 v_0^2$$

Le changement de variable

$$\zeta = \frac{z}{a} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_0}{a} t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{v_0}{a} \frac{d}{d\tau}$$

permet d'obtenir l'équation adimensionnelle

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + (1 - \zeta^2) \left(\frac{2ga}{v_0^2} \zeta - 1\right) = -1$$

Celle-ci correspond à l'équation annoncée avec $\beta = \frac{2ga}{v_0^2}$.

v. Si $\beta = 1$, l'intégrale première s'écrit

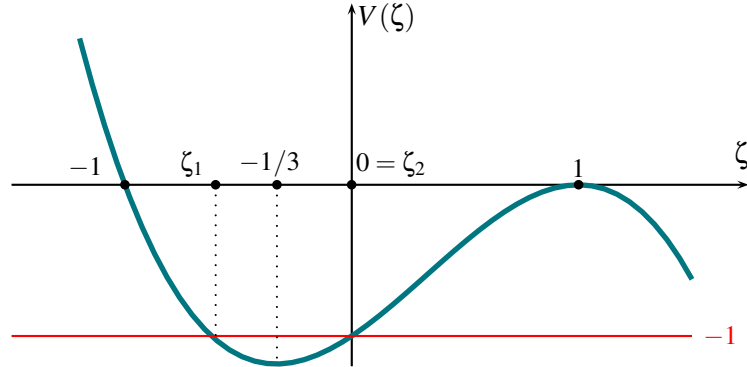
$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 + (1 - \zeta^2)(\zeta - 1) = -1$$

Le mouvement peut donc être étudié sur le diagramme de potentiel de la fonction

$$V(\zeta) = (1 - \zeta^2)(\zeta - 1) = -\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta - 1$$

On sait que $\zeta \in [-1, 1]$ sur la sphère mais il est utile de représenter toute la cubique pour obtenir sa représentation sur $[-1, 1]$.

La fonction $V(\zeta)$ est une cubique présentant un zéro simple en $\zeta = -1$ et un zéro double en $\zeta = 1$ et dont le comportement asymptotique à l'infini est celui de $-\zeta^3$. Le diagramme de potentiel présente donc l'allure suivante.



Cette allure peut être précisée en étudiant les propriétés de V . On calcule

$$V'(\zeta) = -3\zeta^2 + 2\zeta + 1 = -3(\zeta - 1) \left(\zeta + \frac{1}{3}\right)$$

La fonction V possède donc des points stationnaires en $\zeta = -1/3$ et en $\zeta = 1$. Vu le comportement de la cubique en $\pm\infty$, il s'agit d'un minimum en $\zeta = -1/3$ et d'un maximum en $\zeta = 1$.

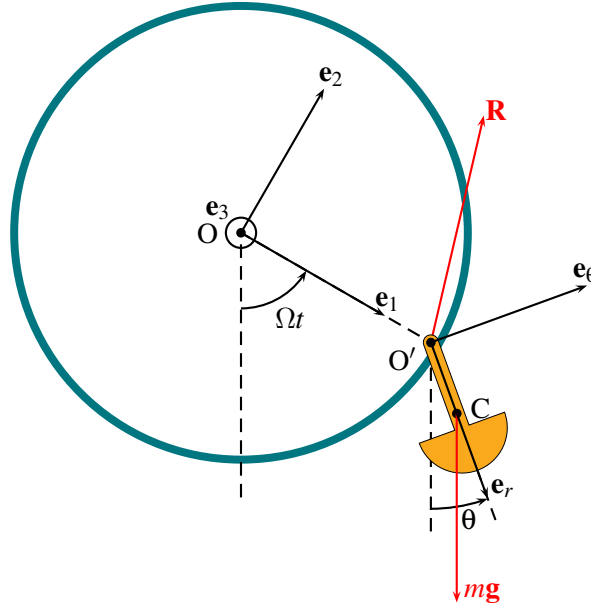
La constante d'intégration apparaissant dans le second membre étant égale à -1 , les points de réflexion sont les solutions de l'équation $V(\zeta) = -1$ qui appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$. Puisque

$$V(\zeta) + 1 = \zeta(-\zeta^2 + \zeta + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta \in \left\{0, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

on trouve que $\zeta_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ et $\zeta_2 = 0$.

L'étude du diagramme de potentiel nous apprend donc que la particule oscille entre deux plans horizontaux situés en $z = 0$ et $z = a(1 - \sqrt{5})/2$ tout en tournant autour de l'axe vertical.

Question III



- i. La nacelle en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Dans le problème étudié ici, elle ne peut cependant qu'osciller autour de son point d'attache O' dont le mouvement est imposé. Il y a donc un seul degré de liberté qui peut être caractérisé par l'angle θ entre la verticale et l'axe $O'C$ de la nacelle.
- ii. Le vecteur position du centre d'inertie de la nacelle par rapport au point fixe O s'écrit

$$\mathbf{s}_C = a\mathbf{e}_1 + l\mathbf{e}_r$$

où les axes $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ sont liés à la nacelle et les axes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ à la roue (voir figure). On a donc

$$\dot{\mathbf{s}}_C = a\dot{\mathbf{e}}_1 + l\dot{\mathbf{e}}_r = a\Omega\mathbf{e}_2 + l\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

- iii. Les forces agissant sur la nacelle sont
 - mg : la résultante des forces de pesanteur agissant sur la nacelle, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
 - $\mathbf{R}$: une force de liaison appliquée en O' , de direction inconnue mais contenue dans le plan du mouvement.
- iv. Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point O donne

$$\dot{\mathbf{N}}_O = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

avec

$$\dot{\mathbf{N}}_O = m\ddot{\mathbf{s}}_C = m(a\Omega\dot{\mathbf{e}}_2 + l\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + l\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta) = m(-a\Omega^2\mathbf{e}_1 + l\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r)$$

Dès lors, le théorème s'écrit

$$m(-a\Omega^2\mathbf{e}_1 + l\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \quad (5)$$

- v. Appliquant à la bouteille le théorème du moment cinétique rapporté à des axes centrés en C et parallèles à des axes absolus, il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\mathbf{M}_C = -l\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_C \dot{\theta} \mathbf{e}_3$$

soit

$$J_C \ddot{\theta} \mathbf{e}_3 = -l\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} \quad (6)$$

- vi. L'énergie de la nacelle n'est pas conservée au cours du mouvement car la force de liaison développe une puissance non nulle. On a

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{O'} = \mathbf{R} \cdot a\Omega \mathbf{e}_2 = a\Omega \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 \neq 0$$

- vii. Éliminant $\mathbf{R}$ de (6) grâce à (5), on obtient successivement

$$\begin{aligned} J_C \ddot{\theta} \mathbf{e}_3 &= -m\ell \mathbf{e}_r \wedge (-a\Omega^2 \mathbf{e}_1 + \ell \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r - \mathbf{g}) \\ &= m\ell a\Omega^2 (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_1) - m\ell^2 \ddot{\theta} (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta) + m\ell (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{g}) \\ &= \left[m\ell a\Omega^2 \sin(\Omega t - \theta) - m\ell^2 \ddot{\theta} - m\ell g \sin \theta \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

où on a pris en compte le fait que le rayon vecteur joignant la nacelle au centre de la roue fait un angle Ωt , nul à l'instant initial, par rapport à la verticale.

Finalement, en projetant l'équation sur $\mathbf{e}_3$, on obtient

$$(J_C + m\ell^2) \ddot{\theta} + m\ell g \sin \theta = m\ell a\Omega^2 \sin(\Omega t - \theta) \quad (7)$$

- viii. Si la grande roue est fixe, $\Omega = 0$ et l'équation (7) devient

$$(J_C + m\ell^2) \ddot{\theta} + m\ell g \sin \theta = 0$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{m\ell g}{J_C + m\ell^2} \sin \theta = 0$$

c'est-à-dire l'équation annoncée avec

$$\beta = \frac{m\ell g}{J_C + m\ell^2}$$

- ix. Dans le cas de petites oscillations autour de la position $\theta = 0$, le mouvement de la nacelle peut être décrit par l'équation linéarisée

$$\ddot{\theta} + \frac{m\ell g}{J_C + m\ell^2} \theta = 0$$

Posant

$$\omega_0^2 = \frac{m\ell g}{J_C + m\ell^2}$$

la loi du mouvement s'écrit

$$\theta(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées à partir des conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$. On obtient alors

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

La période T des petites oscillations de la nacelle autour de sa position verticale vaut donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_C + m\ell^2}{m\ell g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_C}{m\ell^2} + 1} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- x. La période du pendule simple de masse m et de longueur ℓ vaut $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Elle est inférieure à celle de la nacelle de masse m dont le centre d'inertie se trouve à la distance ℓ du point d'attache O' .

Cette différence s'explique par le fait que l'énergie cinétique de la nacelle est la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre d'inertie et de l'énergie cinétique de rotation autour de son centre d'inertie. Alors qu'un point matériel qui partirait du repos avec la même énergie potentielle convertirait la totalité de cette énergie en énergie cinétique de translation de son centre d'inertie, la nacelle utilise une partie de son énergie potentielle pour nourrir le mouvement de rotation autour de son centre d'inertie. Il a donc moins d'énergie disponible pour les oscillations du centre d'inertie autour du point O' de sorte que celles-ci se font à plus faible vitesse.