

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

- i. La convergence de la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ entraîne-t-elle la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$? Justifiez.
- ii. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument, montrez qu'on peut intégrer terme à terme la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- iii. Montrez que, si $f(x, y) = g(x)h(y)$ où g et $h \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, alors $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2)$.
- iv. (a) Exprimez mathématiquement le travail W réalisé par une force $\mathbf{F}$ lorsque celle-ci déplace son point d'application sur une courbe C , en sachant que ce travail est égal à l'intégrale curviligne de $\mathbf{F}$ sur C .
- (b) Démontrez que, si la force $\mathbf{F}$ est conservative, c'est-à-dire si elle peut s'exprimer comme l'opposé du gradient d'une fonction potentielle $V(s)$, alors le travail réalisé par $\mathbf{F}$ le long de toute courbe fermée de longueur finie est nul. On supposera que V est une fonction continûment dérivable sur tout l'espace.

Question II

On pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{4^k (2k-1) (k!)^2} x^k$$

- i. Étudiez la convergence de cette série.
- ii. Déterminez le domaine de définition de f .
- iii. Montrez que, sur l'intervalle de convergence de la série, on a

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

pour une certaine valeur de α à déterminer. Justifiez les opérations effectuées.

Suggestion : on fera utilement usage de la formule de Stirling

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad (k \rightarrow +\infty)$$

Question III

Déterminez toutes les valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles

$$f(x) = \frac{x^\beta}{1+x^{2-\beta}} \in \mathbb{L}_1(]0, +\infty[)$$

Question IV

On considère le corps de volume fini délimité par le cône et le parabolôide dont les équations en coordonnées cylindriques sont respectivement

$$z = \beta r \quad \text{et} \quad z = \frac{r^2}{2p}$$

où β et p sont des constantes strictement positives.

- i. Calculez le volume du corps.
- ii. Calculez l'aire de la partie du parabolôide délimitant le corps considéré.

Question I

i. Non. Pour le montrer, considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Cette série converge (semi-convergence) en tant que série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0. Par contre, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge (série harmonique).

ii. La convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ signifie que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ est convergente.

Par application du critère de Weierstrass, on peut affirmer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ converge uniformément (et absolument) sur tout compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ puisque

$$|a_k \sin kx| \leq |a_k| \quad \forall x \in [a, b]$$

i.e. son terme général est majoré par le terme général d'une série numérique convergente.

Puisque $a_k \sin kx \in C_0([a, b])$ et que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ converge uniformément sur $[a, b]$, la série peut être intégrée terme à terme sur $[a, b]$.

iii. Le critère de Tonelli indique qu'une fonction de plusieurs variables f est intégrable si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de $|f|$ pour lequel chacune des intégrales successives existe. Une telle séquence d'intégrations partielles est donnée ici par

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)| |h(y)| dy$$

La fonction $|g(x)| |h(y)|$ est intégrable par rapport à y pour presque tout x fixé puisque $h \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ et que, dès lors, une fonction étant intégrable si et seulement si elle est intégrable en module, $|h|$ est aussi intégrable.

Soit $H(x)$, le résultat de cette première intégration partielle. On a

$$H(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} |h(y)| dy \right) |g(x)|$$

qui est intégrable par rapport à x puisque g et donc $|g|$ sont intégrables.

Sur base de l'existence des intégrales successives, par application du critère de Tonelli, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ dès lors que g et h sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

iv. (a) Le travail de la force $\mathbf{F}$ déplaçant son point d'application le long d'une courbe C est donné par

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

(b) Si $\mathbf{F}$ est conservative, on a $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{s})$.

Le théorème fondamental des intégrales curvilignes donne alors, pour tout arc régulier C de longueur finie,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -V(\mathbf{s}_2) + V(\mathbf{s}_1)$$

où $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ désignent les extrémités de C .

Si C décrit une courbe fermée de longueur finie, on a $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$ et $W = 0$.

Question II

Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} x^k$$

i. Appliquant le critère du quotient à la série des modules, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}(2k+1)[(k+1)!]^2} \frac{4^k(2k-1)(k!)^2}{(2k)!} |x| \\ &= \frac{1}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)(2k-1)}{(k+1)^2} |x| = |x| \end{aligned}$$

Cela nous assure que la série de puissances étudiée converge absolument si $|x| < 1$, c'est-à-dire sur $I =]-1, 1[$ où I est l'intervalle de convergence de la série, et diverge (avec et sans module) sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$.

En $x = \pm 1$, le critère du quotient ne permet pas de conclure. La série des modules s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2}$$

En utilisant la formule de Stirling, on a, au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} &\sim \frac{\sqrt{4\pi k} (2k)^{2k} e^{-2k}}{4^k(2k-1)(2\pi k k^{2k} e^{-2k})} = \frac{1}{(2k-1)\sqrt{\pi k}} \\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{k^{3/2}} \end{aligned}$$

où $1/k^{3/2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. La série converge donc aussi absolument aux extrémités de son intervalle de convergence.

La série converge donc absolument sur $[-1, 1]$.

La série considérée, en tant que série de puissances convergeant simplement sur le fermé borné $[-1, 1]$, converge uniformément sur $[-1, 1]$.

ii. La fonction f est définie pour tout x en lequel la série de puissances converge, c'est-à-dire sur $[-1, 1]$.

iii. Toute série de puissances est dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence. Ainsi, sur $] -1, 1[$, nous avons

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} kx^{k-1}$$

De là,

$$(1+x)f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} kx^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} kx^k \quad (\dagger)$$

En remplaçant k par $k+1$ dans la première série, sans oublier de retirer une unité à la première valeur de l'indice sommatoire, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{4^k(2k-1)(k!)^2} kx^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}(2k+2)!}{4^{k+1}(2k+1)[(k+1)!]^2} (k+1)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2)(2k+1)(2k)!(k+1)}{4^{k+1}(2k+1)(k+1)^2(k!)^2} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2 \cdot 4^k(k!)^2} x^k \end{aligned}$$

Cette forme permet de combiner les deux termes de (†) pour obtenir successivement

$$\begin{aligned}
 (1+x)f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2 \cdot 4^k (k!)^2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{4^k (2k-1)(k!)^2} kx^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2 \cdot 4^k (k!)^2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{4^k (2k-1)(k!)^2} kx^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)! x^k}{2 \cdot 4^k (2k-1)(k!)^2} \left(-(2k-1) + 2k \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)! x^k}{4^k (2k-1)(k!)^2} = \frac{1}{2} f(x)
 \end{aligned}$$

soit la formule attendue avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Question III

Soit

$$f(x) = \frac{x^\beta}{1+x^{2-\beta}}$$

- Quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^\beta}{1+x^{2-\beta}} \in C_0([0, +\infty[)$$

L'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ dépend donc uniquement de l'intégrabilité au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

- Considérons tout d'abord le comportement au voisinage de 0.

- ◇ Si $\beta < 2$, $x^{2-\beta} = o(1)$ au voisinage de 0 et

$$f(x) = \frac{x^\beta}{1+x^{2-\beta}} \sim x^\beta = \frac{1}{x^{-\beta}}, \quad (x \rightarrow 0^+)$$

qui n'est intégrable que si $-\beta < 1$, soit si $\beta > -1$.

- ◇ Si $\beta = 2$, $f(x) = x^2/2$ qui est intégrable au voisinage de 0.

- ◇ Si $\beta > 2$, $1 = o(x^{2-\beta})$ au voisinage de 0 et

$$f(x) \sim \frac{x^\beta}{x^{2-\beta}} = \frac{1}{x^{2-2\beta}}, \quad (x \rightarrow 0^+)$$

qui est intégrable si $2-2\beta < 1$, soit si $\beta > 1/2$ (donc $\forall \beta > 2$).

En conclusion, l'intégrabilité n'est assurée dans $V(0)$ que si $\beta \in]-1, +\infty[$.

- Considérons ensuite le comportement au voisinage de $+\infty$.

- ◇ Si $\beta < 2$, $1 = o(x^{2-\beta})$ au voisinage de l'infini et

$$f(x) \sim \frac{x^\beta}{x^{2-\beta}} = \frac{1}{x^{2-2\beta}}, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

qui n'est intégrable que si $2-2\beta > 1$, c'est-à-dire $\beta < 1/2$.

- ◇ Si $\beta = 2$, $f(x) = x^2/2$ qui n'est pas intégrable au voisinage de l'infini.
- ◇ Si $\beta > 2$, $x^{2-\beta} = o(1)$ au voisinage de l'infini et $f(x) \sim 1/x^{-\beta}$ qui n'est intégrable que si $-\beta > 1$, c'est-à-dire $\beta < -1$ (donc jamais).

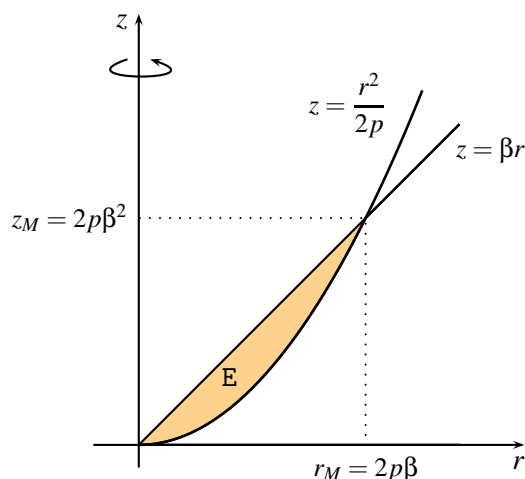
En conclusion, l'intégrabilité n'est assurée dans $V(+\infty)$ que si $\beta \in]-\infty, 1/2[$.

En rassemblant les résultats précédents, on trouve que

$$f(x) = \frac{x^\beta}{1+x^{2-\beta}} \in \mathbb{L}_1(]0, +\infty[) \text{ si et seulement si } \beta \in]-1, 1/2[.$$

Question IV

- i. La forme du domaine d'intégration E suggère de décrire celui-ci en utilisant les coordonnées cylindriques. Le domaine présentant une symétrie de révolution autour de l'axe z , il peut être précisé graphiquement en raisonnant dans un plan radial quelconque.



Le cône et le paraboloïde se coupent à la hauteur z où leur distance r à l'axe z est égale, soit quand

$$\frac{z}{\beta} = \sqrt{2pz}$$

Outre l'intersection à l'origine des axes, le cône et le paraboloïde se coupent donc à la hauteur $z_M = 2p\beta^2$ selon un cercle de rayon $r_M = 2p\beta$.

Le domaine d'intégration E correspond donc à

$$\left\{ (r, \theta, z) : r \in]0, 2p\beta[, \theta \in]0, 2\pi[, z \in \left[\frac{r^2}{2p}, \beta r \right] \right\}$$

Il vient dès lors, en tenant compte du Jacobien, r , associé au passage aux coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2p\beta} r dr \int_{\frac{r^2}{2p}}^{\beta r} dz \\ &= 2\pi \int_0^{2p\beta} r \left(\beta r - \frac{r^2}{2p} \right) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{\beta r^3}{3} - \frac{r^4}{8p} \right]_0^{2p\beta} \\ &= \frac{4}{3} \pi \beta^4 p^3 \end{aligned}$$

qui a bien les dimensions d'un volume puisque β est sans dimension et que p a les dimensions d'une longueur.

- ii. En travaillant en coordonnées cylindriques, le vecteur position d'un point quelconque du paraboloïde peut s'écrire

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad z = \frac{r^2}{2p}$$

La paramétrisation de cette surface au moyen des deux paramètres indépendants r et θ est donc

$$\mathbf{s}(r, \theta) = r\mathbf{e}_r(\theta) + \frac{r^2}{2p}\mathbf{e}_z$$

La partie du paraboloïde délimitant le corps étudié correspond à

$$\theta \in]0, 2\pi[\quad \text{et} \quad r \in]0, r_M[=]0, 2p\beta[$$

On obtient alors successivement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r + \frac{r}{p}\mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = r\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \left(\mathbf{e}_r + \frac{r}{p}\mathbf{e}_z\right) \wedge r\mathbf{e}_\theta = r\mathbf{e}_z - \frac{r^2}{p}\mathbf{e}_r$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}}$$

L'aire recherchée est donc donnée par

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2p\beta} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2p\beta} r\sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3} \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)^{3/2} \right]_0^{2p\beta} \\ &= \frac{2}{3} \pi p^2 \left[\left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)^{3/2} \right]_0^{2p\beta} \\ &= \frac{2}{3} \pi p^2 \left[(1 + 4\beta^2)^{3/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

On vérifie aisément que ce résultat est positif et qu'il a les dimensions d'une aire puisque β est sans dimension et que p a les dimensions d'une longueur.