Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Mai 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Énoncez le critère de Cauchy relatif à la convergence des suites numériques.

ii. Sur quel ensemble l'expression

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}$$

définit-elle une fonction continue ? Justifiez.

iii. Si f est différentiable sur un ouvert Ω comprenant le compact $\mathtt{K} \subset \mathbb{R}^2$, peut-on en déduire que $f^2 \in \mathbb{L}_1(\mathtt{K})$? Justifiez.

iv. (a) Énoncez la formule de Green et ses hypothèses.

(b) Soit $\mathcal{C}$ une courbe régulière, plane, simple, fermée, orientée 'aire à gauche' et décrite par

$$\mathcal{C} = \left\{ \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b] \right\}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont continument dérivables sur $[a,b]$ et telles que $x(a) = x(b)$ et $y(a) = y(b)$. Montrez qu'il existe un champ vectoriel $\mathbf{F}$ tel que

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

(c) Montrez que l'aire A du compact $\mathtt{K}$ délimité extérieurement par $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \alpha \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

où α est une constante à déterminer.

Tournez la page.

Question II

Les résultats classiques relatifs aux séries géométriques permettent d'établir que

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \,,\ \forall q \text{ tel que } |q| < 1$$

i. En exploitant ce résultat, montrez que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \,,\ \forall x \in \mathtt{E}$$

où $\mathtt{E}$ est un intervalle à préciser.

ii. Déduisez-en une expression en série de puissances de la fonction $f(x) = (\mathrm{e} + x)\ln(\mathrm{e} + x)$ sous la forme

$$\alpha + \beta x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

où α, β et $a_k \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. Sur quel intervalle cette expression est-elle valable ?

Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes :

i.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\, dx$$

ii.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$$

iii.
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\, dx$$

iv.
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

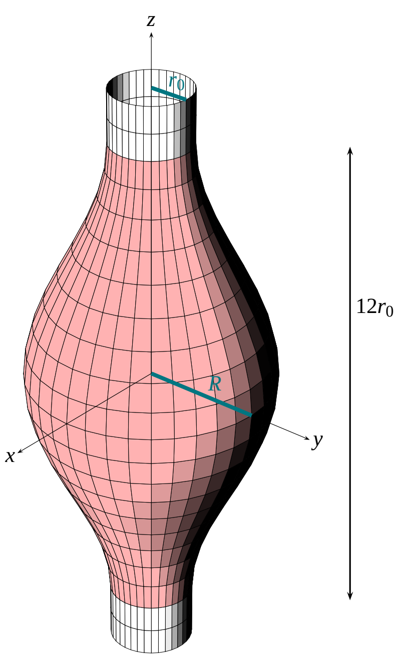
Question IV

Soit un anévrisme abdominal présentant une symétrie de révolution autour de l'aorte et dont la surface latérale est décrite en coordonnées cylindriques par

$$r(z) = \frac{(R+r_0)}{2} + \frac{(R-r_0)}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{6r_0}\right), \quad z \in [-6r_0, +6r_0]$$

i. Calculez le volume de l'anévrisme.

ii. Déterminez une expression intégrale de l'aire de la surface latérale de cet anévrisme.



SOLUTION TYPE

Question I

i. Une suite numérique $\{x_k\}$ est convergente si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall q \geq p \geq N) : \left|x_p - x_q\right| \leq \varepsilon$$

ii. D'une part, les fonctions

$$f_k(x) = \frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
D'autre part, la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ en vertu du critère de Weierstrass. En effet, le terme général de la série des fonctions peut être majoré selon

$$\left|\frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

où le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente puisque

$$\frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}, \quad (k \to \infty)$$

Le théorème relatif à la continuité des séries de fonctions permet alors de conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

iii. La fonction f est continue sur $\mathtt{K}$ puisque f est différentiable sur $\mathtt{K}$. Le produit de deux fonctions continues étant continu, f^2 est également continue sur $\mathtt{K}$. Finalement, toute fonction continue sur un compact étant intégrable sur ce compact, on a

$$f^2 \in \mathbb{L}_1(\mathtt{K})$$

iv. (a) Si $\mathtt{K} \subset \mathbb{R}^2$ est un compact régulier dont la frontière $\mathcal{C}^+$ constituée d'un ou plusieurs contours réguliers par morceaux est orientée 'aire à gauche' et si $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y \in C_1(\mathtt{K})$, alors

$$\iint_{\mathtt{K}} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z \, dxdy = \iint_{\mathtt{K}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

(b) La courbe

$$\mathcal{C} = \left\{ \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b] \right\}$$

admet la paramétrisation

$$\mathbf{s}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y, \quad t \in [a,b]$$

avec $\mathbf{s}'(t) = x'(t)\mathbf{e}_x + y'(t)\mathbf{e}_y$.
La circulation d'un champ vectoriel $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{e}_x + F_y\,\mathbf{e}_y$ sur la courbe fermée $\mathcal{C}^+$ orientée 'aire à gauche' est définie par

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b \mathbf{F}[x(t), y(t)] \cdot \mathbf{s}'(t)\, dt = \int_a^b F_x[x(t), y(t)]\, x'(t) + F_y[x(t), y(t)]\, y'(t)\, dt$$

Celle-ci s'identifie à l'expression donnée dans l'énoncé si $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ puisqu'on a alors

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

(c) La formule de Green

$$\iint_{\mathtt{K}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

appliquée à la fonction $\mathbf{F} = -y(t)\mathbf{e}_x + x(t)\mathbf{e}_y \in C_1(\mathtt{K})$ sur le compact $\mathtt{K}$ régulier entouré par la courbe régulière $\mathcal{C}^+$ orientée 'aire à gauche' donne

$$\iint_{\mathtt{K}} 2\, dxdy = \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

soit

$$A = \iint_{\mathtt{K}} dxdy = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

Ce résultat est celui annoncé avec $\alpha = 1/2$.

Question II

Soit la série géométrique

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad \forall q \text{ tel que } |q| < 1$$

i. Une expression en série de puissances de la fonction $\ln(1+x)$ peut être obtenue à partir de la série géométrique en observant que

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

où

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad \forall t \text{ tel que } |t| < 1$$

Toute série de puissances étant primitivable terme à terme sur son intervalle de convergence, on calcule successivement

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

La série des primitives conservant le même intervalle de convergence que la série de départ, cette relation est valable sur $]-1,1[$, *i.e.*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \ \forall x \in]-1,1[\qquad (\diamond)$$

Aux extrémités $x = -1$ et $x = 1$ de l'intervalle de convergence, la série se réduit respectivement aux séries numériques

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

La première est un multiple de la série harmonique qui diverge. La seconde est semi-convergente en tant que série alternée avec $1/k$ qui tend monotonément vers 0. La série obtenue définit donc une fonction continue sur $]-1,1]$ et l'égalité $(\diamond)$ s'étend en $x = 1$ par continuité. L'égalité $(\diamond)$ est donc valable sur $\mathtt{E} =]-1,1]$.

ii. Afin d'utiliser le résultat du point i., on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathrm{e} + x) \ln(\mathrm{e} + x) = (\mathrm{e} + x) \ln \left[\mathrm{e} \left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}} \right) \right] \\ &= (\mathrm{e} + x) \left[\ln \mathrm{e} + \ln \left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}} \right) \right] = (\mathrm{e} + x) \left[1 + \ln \left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}} \right) \right] \\ &= (\mathrm{e} + x) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k \mathrm{e}^k} \right] \end{aligned}$$

où la série de puissances converge si $x/\mathrm{e} \in]-1,1]$ donc sur $]-\mathrm{e},\mathrm{e}]$.
Afin d'obtenir une série de puissances unique, on écrit successivement

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\mathrm{e}+x)\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k\mathrm{e}^k}\right] \\
&= \mathrm{e}+x+\mathrm{e}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k\mathrm{e}^k}+x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k\mathrm{e}^k} \\
&= \mathrm{e}+x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k\mathrm{e}^{k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k\mathrm{e}^k} \\
&= \mathrm{e}+2x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k\mathrm{e}^{k-1}}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^k}{(k-1)\mathrm{e}^{k-1}} \\
&= \mathrm{e}+2x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^k}{\mathrm{e}^{k-1}}\left(\frac{-1}{k}+\frac{1}{k-1}\right) \\
&= \mathrm{e}+2x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^k}{k(k-1)\mathrm{e}^{k-1}},\ \forall x \in]-\mathrm{e},\mathrm{e}]
\end{aligned}$$

Question III

i. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \in C_0(]0,1/2])$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]0,1/2]$. Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au voisinage de 0. On peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (x \to 0^+)$$

de sorte que l'intégrale existe puisque l'intégrande se comporte "mieux" qu'une fonction intégrable.

ii. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$$

On a

$$\frac{1}{x^2\ln x} \in C_0(]0,1/2])$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]0,1/2]$. Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au voisinage de l'origine. On peut écrire

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right), \quad (x \to 0^+)$$

de sorte que l'intégrale n'existe pas puisque l'intégrande se comporte "moins bien" que la fonction $1/x$ qui n'est pas intégrable.

iii. Soit

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\,dx$$

- Nous constatons d'abord que

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} \in C_0(]1,2])$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]1,2]$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de 1.

- La formule de Taylor permet d'écrire

$$\ln x \sim x - 1, \quad (x \to 1^+)$$

de sorte que

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} \sim \frac{(x-1)^{3/2}}{(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad (x \to 1^+)$$

Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de 1 puisque l'intégrande s'y comporte comme une fonction intégrable.

En conclusion, l'intégrale existe.

iv. Soit

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

On a

$$\frac{1}{x \ln x} \in C_0([2, +\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $[2, +\infty[$. Il faut donc encore étudier l'intégrabilité au voisinage de l'infini. On peut écrire

$$\frac{1}{x \ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to +\infty)$$

ce qui ne permet pas de conclure puisque cela indique seulement que l'intégrande se comporte "mieux" qu'une fonction qui n'est pas intégrable. Par contre, il est possible de déterminer une primitive $F(x)$ de $1/(x \ln x)$ sur $[2, +\infty[$,

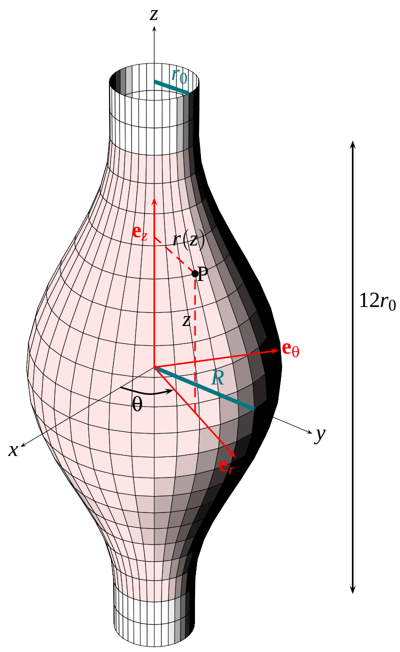
$$F(x) = \ln|\ln x|$$

telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln|\ln x| = +\infty$$

La limite pour $x \to +\infty$ n'étant pas finie, on en déduit que l'intégrale n'existe pas en vertu de la contraposée du théorème fondamental du calcul intégral.

Question IV



i. Le volume de l'anévrisme A s'exprime par

$$V = \iiint_A dxdydz$$

La symétrie de révolution de l'anévrisme autour de l'axe vertical conduit naturellement à utiliser des coordonnées cylindriques pour étudier ce problème. En coordonnées cylindriques, le domaine est

$$\{(r,\theta,z) : 0 < r \leq r(z),\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ -6r_0 \leq z \leq 6r_0\}$$

où

$$r(z) = \frac{(R+r_0)}{2} + \frac{(R-r_0)}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{6r_0}\right)$$

En prenant en compte le Jacobien $J = r$ associé au changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-6r_0}^{6r_0} dz \int_0^{r(z)} r\, dr \\
&= 2\pi \int_{-6r_0}^{6r_0} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{r(z)} dz = \pi \int_{-6r_0}^{6r_0} r^2(z)\, dz \\
&= \pi \int_{-6r_0}^{6r_0} \left[\frac{(R+r_0)}{2} + \frac{(R-r_0)}{2}\cos\frac{\pi z}{6r_0}\right]^2 dz \\
&= \pi \int_{-6r_0}^{6r_0} \left[\frac{(R+r_0)^2}{4} + \frac{(R-r_0)^2}{4}\cos^2\frac{\pi z}{6r_0} + \frac{R^2-r_0^2}{2}\cos\frac{\pi z}{6r_0}\right] dz \\
&= \pi \int_{-6r_0}^{6r_0} \left[\frac{(R+r_0)^2}{4} + \frac{(R-r_0)^2}{8}\left(1+\cos\frac{2\pi z}{6r_0}\right) + \frac{R^2-r_0^2}{2}\cos\frac{\pi z}{6r_0}\right] dz \\
&= \pi \left[\frac{(R+r_0)^2 z}{4} + \frac{(R-r_0)^2}{8}\left(z + \frac{6r_0}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{6r_0}\right) + \frac{R^2-r_0^2}{2}\frac{6r_0}{\pi}\sin\frac{\pi z}{6r_0}\right]_{-6r_0}^{6r_0} \\
&= 2\pi \left[\frac{3(R+r_0)^2 r_0}{2} + \frac{3(R-r_0)^2 r_0}{4}\right] \\
&= \frac{3\pi r_0}{2}\left[2(R+r_0)^2 + (R-r_0)^2\right]
\end{aligned}$$

On peut vérifier que si l'artère n'est pas gonflée, c'est-à-dire si $R = r_0$, le volume obtenu correspond à celui d'un cylindre circulaire droit de rayon r_0 et de hauteur $12r_0$, soit $V = 12\pi r_0^3$.

ii. La symétrie de révolution suggère encore d'utiliser une paramétrisation de la surface latérale de l'anévrisme basée sur les coordonnées cylindriques. Le vecteur position d'un point de la surface est donné par

$$\mathbf{s}(\theta,z) = r(z)\ \mathbf{e}_r(\theta) + z\,\mathbf{e}_z, \quad \theta \in [0,2\pi[,\ z \in [-6r_0, +6r_0]$$

où

$$r(z) = \frac{(R+r_0)}{2} + \frac{(R-r_0)}{2}\cos\frac{\pi z}{6r_0}$$

Il vient dès lors successivement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r(z)\ \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = -r(z)\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{e}_z + r(z)\mathbf{e}_r$$

de sorte que la surface est régulière, et

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right\| = r(z)\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

où

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{(R-r_0)}{2}\frac{\pi}{6r_0}\sin\frac{\pi z}{6r_0}$$

Finalement, l'aire latérale Σ_A de l'anévrisme est donnée par

$$\begin{aligned}\Sigma_A = \iint_{\Sigma_A} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-6r_0}^{6r_0} r(z)\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1}\ dz \\ &= 2\pi \int_{-6r_0}^{6r_0} r(z)\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1}\ dz\end{aligned}$$

Notons que cette intégrale existe puisque l'intégrande est continu sur le domaine compact d'intégration.