

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.

Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$, déterminez le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \beta + 4 \\ -1 & -2 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

et identifiez les relations linéaires existant éventuellement entre les colonnes de A.

Question II

Soient un entier $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On considère la matrice carrée M_n d'ordre n dont l'élément m_{ij} est défini par

$$m_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i = j \leq n-1 \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Écrivez explicitement la matrice M_n .
- Calculez $\det M_n$.
- Déterminez les valeurs de x pour lesquelles M_n est singulière.

Question III

Soit w une matrice colonne de $n > 1$ éléments $\in \mathbb{C}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} ww^* \\ w^* \end{pmatrix}$$

- Déterminez les dimensions de A et de A^*A .
- La matrice A^*A est-elle hermitienne ? Normale ? Unitaire ?

SOLUTION TYPE

Question I

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A afin de la réduire à une forme normale échelonnée. Ceci ne modifiera ni le rang ni les éventuelles relations linéaires entre les colonnes de la matrice. Partant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \beta+4 \\ -1 & -2 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

il vient

$$\begin{array}{l} \ell_2 \rightarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour poursuivre l'échelonnage, échangeons la deuxième et la troisième colonne, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta+1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notons que cet échange de colonnes modifie les relations linéaires entre les colonnes et qu'il faudra être attentif à la renumérotation de celles-ci : la nouvelle colonne c_2^{new} correspond à l'ancienne c_3 , et la nouvelle colonne c_3^{new} est l'ancienne c_2 .

Continuant l'échelonnage, il vient

$$\begin{array}{l} \ell_1 \rightarrow \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \rightarrow \ell_3 - (\beta+1)\ell_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2-\beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta-\beta^2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $2 - \beta - \beta^2 = -(\beta - 1)(\beta + 2)$.

- Si $\beta \neq 1$ et $\beta \neq -2$, on peut diviser la troisième ligne de la matrice (*) par $2 - \beta - \beta^2 \neq 0$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2-\beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Échangeant la troisième et la quatrième colonne de cette matrice, il vient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\beta & 2 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes correspondent maintenant, dans l'ordre, aux colonnes c_1 , c_3 , c_4 et c_2 de la matrice initiale. Finalement, on peut poursuivre les opérations élémentaires pour former la forme normale échelonnée

$$\begin{array}{l} \ell_1 \rightarrow \ell_1 - (2-\beta)\ell_3 \\ \ell_2 \rightarrow \ell_2 - \beta\ell_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans les conditions envisagées, le rang de A est égal à 3. Les opérations élémentaires portant sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 2 pts

Attention : dans les cas où le rang vaut 2, il faut montrer ou annoncer que tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls pour mériter les points du principe.

La présence de signes d'égalité entre les matrices successives donne lieu à une pénalité de 2 pts pour l'exercice.

Rang si $\beta \notin \{1, -2\}$: 2 pts

linéaires entre les colonnes de la matrice. Il existe donc dans ce cas une seule relation linéaire entre les colonnes : la dernière colonne de la forme échelonnée est égale à deux fois la première. Compte tenu des deux échanges de colonnes, la dernière colonne correspond à l'ancienne colonne c_2 , et la relation s'écrit

$$c_2 = 2c_1$$

- Si $\beta = 1$, la matrice (*) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\spadesuit)$$

Le rang de A est égal à 2 dans ce cas.

Il y a deux relations linéaires entre les colonnes, qui peuvent s'écrire

$$c_3^{new} = 2c_1^{new} \quad \text{et} \quad c_4^{new} = c_1^{new} + c_2^{new}$$

Puisque les colonnes 2 et 3 ont été échangées à travers les opérations élémentaires menant à (), on a

$$c_1^{new} = c_1, \quad c_2^{new} = c_3, \quad c_3^{new} = c_2, \quad c_4^{new} = c_4$$

et les relations linéaires entre les colonnes de la matrice de départ peuvent donc s'exprimer sous la forme

$$c_2 = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_4 = c_1 + c_3$$

- Si $\beta = -2$, la matrice (*) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 2 dans ce cas.

Il y a deux relations linéaires entre les colonnes, qui peuvent s'écrire

$$c_3^{new} = 2c_1^{new} \quad \text{et} \quad c_4^{new} = 4c_1^{new} - 2c_2^{new}$$

soit

$$c_2 = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_4 = 4c_1 - 2c_3$$

En conclusion,

- si $\beta \notin \{1, -2\}$, $\rho(A) = 3$ et $c_2 = 2c_1$;
- si $\beta = 1$, $\rho(A) = 2$, $c_2 = 2c_1$ et $c_4 = c_1 + c_3$;
- si $\beta = -2$, $\rho(A) = 2$, $c_2 = 2c_1$ et $c_4 = 4c_1 - 2c_3$.

Nombre de relations linéaires exact : 1 pt
Relation linéaire : 1 pt

Rang si $\beta = 1$: 1 pt
Nombre de relations linéaires exact : 0.5 pt
Relations linéaires : 0.5 pt par relation

Rang si $\beta = -2$: 1 pt
Nombre de relations linéaires exact : 0.5 pt
Relations linéaires : 0.5 pt par relation

Présence d'une conclusion cohérente avec les résultats obtenus : 1 pt

TOTAL QI : 12 PTS

Question II

- i. La définition des éléments de la matrice M_n permet d'écrire celle-ci sous la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Écriture de la matrice :
2 pts

Total i. : 2 pts

- ii. Le déterminant d'une matrice ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Effectuons l'opération

$$c_1 \rightarrow c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + \cdots + x^{n-1} c_n$$

Méthode de calcul
correcte (utilisation
correcte des propriétés
du déterminant) : 1 pt

Pour $i \leq n-1$, les seuls éléments non nuls de la ligne i sont x (colonne i) et -1 (colonne $i+1$). Le nouvel élément de la ligne i situé dans la première colonne vaut donc

$$x^{i-1} \cdot (x) + x^i \cdot (-1) = 0$$

Le dernier élément de la première colonne vaut, quant à lui,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

Notons $S = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Il vient alors

$$\det M_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \\ S & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant selon la première colonne en profitant du fait que celle-ci comporte un seul élément non nul situé en ligne n . On a

$$\det M_n = (-1)^{n+1} S \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'ordre $(n-1)$ restant à calculer est celui d'une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à -1 . Il vaut donc $(-1)^{n-1}$. On obtient

Valeur du
déterminant : 3 pts

Total ii. : 4 pts

$$\det M_n = (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

- iii. La matrice M_n est singulière si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = 0$$

En reconnaissant dans cette expression la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ou en exploitant la factorisation classique

$$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

on a donc, pour tout $x \neq 1$,

$$\det M_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Le déterminant est donc nul si et seulement si $x^n = 1$ (avec $x \neq 1$). Or, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^n = 1$ admet pour seules solutions $x = 1$ si n est impair et $x = \pm 1$ si n est pair.

Par conséquent,

- si n est impair, M_n n'est jamais singulière ;
- si n est pair, M_n est singulière si et seulement si $x = -1$.

Question III

Soit

$$A = \begin{pmatrix} ww^* \\ w^* \end{pmatrix}$$

où w est une matrice colonne de $n > 1$ éléments complexes.

- i. Les dimensions de w étant $n \times 1$, $w^* = \overline{w}^T$ est une matrice $1 \times n$. Le produit ww^* est donc une matrice $n \times n$. La matrice A possède une ligne de plus que ww^* et est donc de dimensions $(n+1) \times n$.

La matrice $A^* = \overline{A}^T$ est de dimensions $n \times (n+1)$. Dès lors, la matrice A^*A est une matrice carrée d'ordre n .

- ii. (a) L'adjointe de A^*A est donnée par

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

La matrice A^*A étant égale à son adjointe, elle est hermitienne.

- (b) La matrice A^*A étant hermitienne, elle est également normale.

On peut vérifier explicitement que la matrice commute avec son adjointe en écrivant, puisque A^*A est hermitienne,

$$(A^*A)^*A^*A = A^*AA^*A = A^*A(A^*A)^*$$

- (c) Une matrice carrée est unitaire si son inverse est égale à son adjointe, c'est-à-dire si le produit de cette matrice et de son adjointe est égal à la matrice identité. On doit donc vérifier si

$$A^*A(A^*A)^* = A^*AA^*A = \mathbb{I}_n$$

Matrice singulière si $\det M_n = 0$: 1 pt

Somme des termes d'une suite géom. ou factorisation de $(1 - x^n)$: 1 pt

Cas n pair : 1 pt

Cas n impair : 1 pt

Total iii. : 4 pts

TOTAL QII : 10 PTS

Dimensions de A : 1.5 pt

Dimensions de A^*A : 1.5 pt

Total i. : 3 pts

Expression de $(A^*A)^*$: 1 pt

Concept de matrice hermitienne : 1 pt

Total (a) : 2 pts

Total (b) : 2 pts (démonstration explicite pas attendue)

Concept de matrice unitaire : 1 pt

Traduction mathématique : 1 pt

Pour explorer cette égalité, notons d'abord que w^*w est une matrice 1×1 , soit un nombre. On a alors

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} ww^* & w \\ w^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ww^* \\ w^* \end{pmatrix} = ww^*ww^* + ww^* \\ &= w(w^*w)w^* + ww^* = (w^*w + 1)ww^* \end{aligned}$$

et

$$A^*AA^*A = (w^*w + 1)^2 ww^*ww^* = (w^*w + 1)^2 (w^*w)ww^* = \alpha ww^*$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où ww^* est une matrice carrée d'ordre n qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \cdots & \bar{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\bar{w}_1 & w_1\bar{w}_2 & \cdots & w_1\bar{w}_n \\ w_2\bar{w}_1 & w_2\bar{w}_2 & \cdots & w_2\bar{w}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n\bar{w}_1 & w_n\bar{w}_2 & \cdots & w_n\bar{w}_n \end{pmatrix}$$

La condition $A^*AA^*A = \mathbb{I}$ implique que la matrice ww^* soit diagonale et un multiple non nul de la matrice identité. L'annulation des éléments non diagonaux signifie que w doit avoir au plus un élément non nul. Dans ce cas, ww^* serait une matrice diagonale dont tous les éléments, sauf éventuellement un, sont nuls. La matrice ww^* ne peut donc être un multiple non nul de la matrice identité.

Nous en déduisons que la matrice A^*A n'est pas unitaire, quel que soit w .

Expression de A^*A en fonction de w : 1 pt

Identification de w^*w comme un nombre : 1 pt

Mise en évidence du facteur $w^*w + 1$: 1 pt

Expression de A^*AA^*A en fonction de w avec mise en évidence du facteur scalaire : 1 pt

Raisonnement : 2 pts

Conclusion : 1 pt

Total (c) : 9 pts

Total ii. : 13 pts

TOTAL QIII : 16 PTS

TOTAL : 38 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Quand un énoncé contient un paramètre, la discussion éventuelle ne doit pas être menée arbitrairement en choisissant des valeurs du paramètre qui simplifient le problème posé. Ce n'est que quand une opération ne peut être réalisée pour certaines valeurs du paramètre qu'il faut commencer à discuter, par exemple quand ce paramètre annule une expression par laquelle on divise une ligne de la matrice. Il faut alors traiter séparément le cas où le paramètre ne pose aucun problème et les cas particuliers correspondant aux valeurs du paramètre exclues initialement.
- La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées. Puisqu'il est aussi demandé d'identifier les relations linéaires entre les colonnes de la matrice, il faut privilégier les opérations sur les lignes par rapport à la manipulation des colonnes. Si des opérations élémentaires sont effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Si, par contre, des opérations élémentaires sont effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées. Des échanges de colonnes sont parfois nécessaires et permettent tout de même de retrouver les relations linéaires entre les colonnes, à condition de garder la trace de ces échanges.
- Pour échelonner une matrice, il faut procéder avec ordre et méthode. Il faut toujours commencer par faire apparaître un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaître des zéros en dessous de ce 1

en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne, où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve. Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang. Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne, en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne. En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.

- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell'_1 = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell'_2 = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

ne sont pas licites; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente de la liste.

- Le rang d'une matrice est aussi égal à l'ordre de la plus grande matrice non singulière que l'on peut extraire de la matrice de départ, éventuellement après des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice. Il faut être attentif au fait que, pour pouvoir affirmer que le rang de la matrice est égal à 2 pour une valeur de β , il faut avoir vérifié que toutes les sous-matrices d'ordre 3 que l'on peut extraire de la matrice de départ sont singulières. Cette méthode permet de déterminer le rang, mais n'est pas adaptée à la recherche des relations linéaires entre les colonnes, qui était également demandée.
- Une relation repérée « à l'œil » par inspection de la matrice doit être justifiée, et rien ne garantit alors qu'on a trouvé toutes les relations linéaires. La forme normale échelonnée fournit, en une fois, le rang et toutes les relations linéaires.
- Le nombre de relations linéaires entre les colonnes de la matrice est égal au nombre de ses colonnes diminué du rang de la matrice. Ici, si $\beta \notin \{1, -2\}$, le rang de la matrice étant égal à 3, il y a une seule relation linéaire entre les 4 colonnes de la matrice. Pour $\beta = 1$ et pour $\beta = -2$, le rang de la matrice est égal à 2 et il y a donc 2 relations linéaires (indépendantes) entre les 4 colonnes de la matrice. Ceci permet de détecter immédiatement un nombre erroné de relations linéaires.
- Puisque le rang d'une matrice est à la fois égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes linéairement indépendantes, la matrice de cet exercice, qui ne comporte que 3 lignes, ne peut comporter au maximum que 3 colonnes linéairement indépendantes. Il y a donc toujours, quelle que soit la valeur de β , au moins une relation linéaire entre les 4 colonnes.
- Dans les cas particuliers, il faut remplacer β par sa valeur : une relation exprimée

en fonction de β dans le cas $\beta = 1$ n'est pas une réponse aboutie.

- Quand l'échelonnage de la matrice requiert un échange de deux colonnes, les relations observées sur la forme normale échelonnée doivent être interprétées en conséquence. On peut aussi facilement vérifier les relations obtenues sur la matrice de départ : par exemple, pour $\beta = 1$, on contrôle aisément que $c_1 + c_3 = (2 \ 5 \ 0)^T = c_4$.
- Les matrices successives obtenues suite aux opérations élémentaires effectuées ne sont pas égales entre elles, même si certaines propriétés (comme le rang) de ces matrices sont conservées. On ne peut donc écrire un symbole d'égalité entre ces matrices successives.
- La réponse doit se terminer par une conclusion qui rassemble, pour chaque valeur ou plage de valeurs du paramètre, le rang de la matrice et les relations linéaires entre ses colonnes.

Question II

- La définition des éléments m_{ij} doit être lue avec soin. L'élément x n'apparaît sur la diagonale principale que pour $i \leq n-1$: l'élément m_{nn} vaut 1, et non x , puisque tous les éléments de la dernière ligne sont égaux à 1. De même, l'élément -1 apparaît juste au-dessus de la diagonale principale ($j = i+1$) dans chacune des lignes 1 à $n-1$, y compris dans la ligne $n-1$ où $m_{n-1,n} = -1$ et non 0.
 - L'indice i désigne la ligne et l'indice j la colonne. Inverser leurs rôles conduit à placer les -1 sous la diagonale ou les 1 dans la dernière colonne au lieu de la dernière ligne.
 - La matrice demandée est une matrice d'ordre n quelconque. Il ne suffit donc pas d'écrire la matrice dans des cas particuliers (par exemple $n = 3$ ou $n = 4$) : il faut utiliser des points de suspension pour représenter une matrice d'ordre n quelconque, en faisant clairement apparaître la structure des premières et dernières lignes et colonnes. Écrire la matrice pour une petite valeur de n reste néanmoins une façon de vérifier son écriture générale.
- Un déterminant d'ordre n quelconque ne peut pas être calculé en se basant uniquement sur les cas $n = 2$ et $n = 3$ (voire $n = 4$ ou $n = 5$) et en généralisant "par logique" le résultat observé. Une telle démarche permet de deviner le résultat et de vérifier la réponse obtenue, mais elle ne constitue pas une démonstration.
 - La matrice M_n n'est ni diagonale ni triangulaire : son déterminant n'est pas le produit x^{n-1} de ses éléments diagonaux.
 - Beaucoup d'étudiants ont choisi de développer le déterminant selon la première ou la dernière colonne, ce qui fournit une relation de récurrence. Cette approche est tout à fait valide. En développant selon la première colonne, dont les seuls éléments non nuls sont x (ligne 1) et 1 (ligne n), on obtient

$$\det M_n = x \det M_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = x \det M_{n-1} + 1$$

puisque le premier mineur est le déterminant de M_{n-1} et le second celui d'une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux valent -1 . En développant selon la dernière colonne, on obtient aussi

$$\text{dtm } M_n = \text{dtm } M_{n-1} + x^{n-1}$$

Une relation de récurrence n'est cependant pas une réponse : il faut la résoudre, ce qui nécessite de calculer explicitement un cas de base, par exemple $\text{dtm } M_2 = x + 1$, puis d'appliquer la relation de proche en proche :

$$\text{dtm } M_n = \text{dtm } M_2 + x^2 + \dots + x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

Annoncer le résultat final directement après avoir écrit la relation de récurrence, sans cas de base ni justification, ne constitue pas une démonstration. Il ne faut pas non plus abandonner l'exercice une fois la relation de récurrence obtenue : l'essentiel du travail est fait.

- Lors du développement d'un déterminant selon une rangée, il ne faut pas oublier le signe $(-1)^{i+j}$ associé à l'élément situé en ligne i et en colonne j . Si on souhaite donner un nom au mineur correspondant, obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j , il faut utiliser une notation clairement définie (par exemple mineur_{ij}) en évitant la confusion avec la notation m_{ij} introduite dans l'énoncé pour désigner les éléments de M . Les notations $\text{dtm } M_{(n-1),n}$ ou $\text{dtm } m_{(n-1),n}$ ne conviennent pas car elles désignent d'autres objets.
 - Les calculs doivent être expliqués. Une succession de déterminants reliés par des signes d'égalité, sans indiquer la rangée selon laquelle on développe ou l'opération effectuée, ne permet pas de suivre le raisonnement.
- iii. • Une matrice carrée est singulière si et seulement si son déterminant est nul. Il fallait donc résoudre l'équation $1 + x + \dots + x^{n-1} = 0$. Il faut reconnaître dans $1 + x + \dots + x^{n-1}$ la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x . L'énoncé précise que $x \neq 1$: c'est précisément ce qui permet d'écrire $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$. La valeur $x = 1$, solution de $x^n = 1$, doit donc être écartée.
- La discussion selon la parité de n fait partie intégrante de la réponse. Elle doit être déduite de l'équation $x^n = 1$, et non de l'observation de quelques valeurs particulières de n . Une conclusion annoncée sans aucun calcul, même correcte, ne peut être valorisée.

Question III

- i. • La matrice A est constituée de blocs. Il ne faut pas confondre ces blocs avec des nombres : A n'est pas une matrice de dimensions 2×1 . Le bloc ww^* comporte n lignes et n colonnes et le bloc w^* une ligne et n colonnes : A est une matrice de dimensions $(n+1) \times n$.
- Il ne faut pas confondre ww^* , qui est une matrice carrée d'ordre n , et w^*w , qui est une matrice d'ordre 1, c'est-à-dire un nombre.

- ii. • C'est bien la matrice A^*A dont il fallait étudier les propriétés et non la matrice A . La matrice A n'étant pas carrée, elle ne peut d'ailleurs être ni hermitienne, ni normale, ni unitaire. Il faut lire les énoncés avec attention.

- L'adjointe d'un produit est le produit des adjointes pris dans l'ordre inverse : $(XY)^* = Y^*X^*$. On a donc $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. Ce résultat est valable quelle que soit la matrice A : il n'est pas nécessaire d'explicitier A^*A en fonction de w pour montrer qu'elle est hermitienne.

- Pour conjuguer et transposer une matrice définie par blocs, il faut conjuguer et transposer chacun des blocs et aussi transposer la structure globale de la matrice en déplaçant les blocs symétriquement par rapport à la diagonale principale. On a ici

$$A^* = ((ww^*)^* \quad (w^*)^*) = (ww^* \quad w)$$

qui est une matrice de dimensions $n \times (n+1)$, et non $\begin{pmatrix} ww^* \\ w \end{pmatrix}$ (oubli de la transposition de la structure) ni $(ww^* \quad w^*)$ (oubli de l'adjointe des blocs).

- Toute matrice hermitienne est normale. La réciproque est fautive : une matrice normale n'est pas nécessairement hermitienne. Une fois établi le caractère hermitien de A^*A , sa normalité en découle immédiatement.
- L'étape la plus délicate de l'exercice était de reconnaître un scalaire en w^*w . Il faut toujours essayer de repérer les produits matriciels dont le résultat est un scalaire (une matrice d'ordre 1) car ces scalaires, contrairement aux matrices, peuvent être mis en évidence dans les produits (ou simplifiés au numérateur et dénominateur dans d'autres situations) :

$$ww^*ww^* = w(w^*w)w^* = (w^*w)ww^*$$

- Pour étudier le caractère unitaire, beaucoup d'étudiants se sont arrêtés à la condition $(A^*A)^2 = \mathbb{I}_n$: il faut exprimer A^*A en fonction de w pour pouvoir poursuivre. La fin du raisonnement se lit alors directement sur les éléments de la matrice αww^* , qui valent $\alpha w_i \bar{w}_j$. Pour qu'elle soit égale à $\mathbb{I}_n$, ses éléments diagonaux $\alpha |w_i|^2$ devraient tous valoir 1, ce qui impose que tous les w_i soient non nuls. Mais alors, ses éléments non diagonaux $\alpha w_i \bar{w}_j$ seraient eux aussi non nuls, alors qu'ils devraient être nuls. Les deux exigences sont incompatibles : A^*A n'est jamais unitaire.

- La formulation de la question "La matrice A^*A est-elle unitaire?" était malheureusement un peu imprécise.

Elle a été comprise par une majorité d'étudiantes et d'étudiants comme "Pour quelles valeurs de w la matrice A^*A est-elle unitaire?". C'est aussi sur base de cette interprétation que la solution type a été rédigée.

La question a été interprétée par quelques étudiants comme "De la définition de A donnée dans l'énoncé, peut-on conclure que A^*A est unitaire?". Dans cette compréhension, on peut simplement répondre par la négative et montrer par un contre-exemple que la définition de A n'implique pas que A^*A soit unitaire. Si on prend $w = 0$, on a évidemment $A = 0$ et $A^*A = 0$ qui n'est pas inversible et ne peut donc être unitaire.

Cette possible double interprétation ne porte pas à conséquence dans le cadre d'une évaluation formative, mais de telles ambiguïtés seront évidemment évitées dans le cadre de l'examen.