Octobre 2025

MATH0013 - ALGÈBRE

ÉVALUATION FORMATIVE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

- *Indiquez lisiblement votre nom et votre prénom en MAJUSCULES ainsi que votre matricule (format 2025...) aux emplacements prévus.*
- *Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez* ***à la fin*** *du questionnaire. À l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.*
- *Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour* ***le 15 octobre à 8h00****.*

Question I

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez le rang de A.

ii. Déterminez les éventuelles relations linéaires existant entre les colonnes de A.

Question II

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{P} & 0 & 0 \\ \mathsf{Q} & \mathbb{I} & 0 \\ \mathsf{R} & \mathsf{S} & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

construite à partir des matrices carrées P, Q, R et S appartenant à $\mathbb{C}^n_n$.

i. Déterminez les dimensions de A.

ii. Déterminez la(les) condition(s) sur P, Q, R et S pour que A soit unitaire.

Question III

i. Démontrez que, si D est une matrice diagonale réelle d'ordre m et si $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^m_n$, alors $\mathsf{A}^*\mathsf{D}\mathsf{A}$ est hermitienne.

ii. Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n.

   (a) Déterminez les éléments de A si $\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = 0$.

   (b) Démontrez que $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ si $\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{X}) = \operatorname{trace}(\mathsf{B}\mathsf{X})$ quelle que soit la matrice X réelle carrée d'ordre n.

iii. Déterminez toutes les matrices carrées A telles que

$$\det\left(\mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathsf{A}\right) = -\det \mathsf{A}$$

Question I

Principe du calcul du rang (que ce principe soit énoncé ou mis en oeuvre), soit par réduction à une forme échelonnée, soit par détermination du nombre de rangées linéairement indépendantes, soit par extraction d'une matrice non singulière d'ordre maximal : 2 pts

i. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée. Ces opérations n'affectent pas le rang. Il vient

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \to \ell_4 - 3\ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & 6 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Mise en oeuvre de la méthode choisie : 3 pts

- *Une erreur de principe dans l'application des opérations élémentaires : -2 pts*
- *Erreurs de calcul : une erreur $\to -1$ pt, plusieurs erreurs $\to -2$ pts*

Identification d'une sous-matrice non singulière d'ordre 3 sans montrer que les 5 déterminants d'ordre 4 sont nuls : maximum 2 pts/7. L'utilisation d'opérations élémentaires sur les colonnes ne peut être sanctionnée dans le cadre du calcul du rang.

Ensuite, successivement,

$$\ell_2 \to -\ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & 6 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 3\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 5\ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4 + 6\ell_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

Présence d'au moins un signe d'égalité entre les matrices successives lors de l'échelonnage : -1 pt

En échangeant les colonnes 3 et 4 afin de pouvoir continuer l'échelonnage, il vient

$$\mathsf{c}_3 \leftrightarrow \mathsf{c}_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Ensuite,

$$\ell_3 \to -\frac{\ell_3}{8} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Et enfin,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 6\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 + \ell_3 \\ \ell_4 \to \ell_4 + 14\ell_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeur correcte du rang (et cohérente avec les développements effectués) : 2 pts

On peut donc conclure que $\rho(\mathsf{A}) = 3$.

Total i. : 7 pts

ii. L'analyse de la forme échelonnée ci-dessus montre qu'il y a deux relations linéaires entre les colonnes c'_i de cette matrice, soit

$$c'_4 = 3c'_1 - c'_2 \quad \text{et} \quad c'_5 = -c'_1 + \frac{3}{2}c'_2 + \frac{1}{2}c'_3$$

Écriture ou annonce de deux relations linéaires : 1 pt

Relations linéaires exactes : 1 pt par relation

Les opérations élémentaires portant exclusivement sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. Cependant, puisque les colonnes 3 et 4 ont été échangées en cours de calcul, les relations linéaires entre les colonnes de la matrice initiale s'écrivent

$$c_3 = 3c_1 - c_2 \quad \text{et} \quad c_5 = -c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_4$$

Total ii. : 3 pts

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. La matrice A est une matrice carrée d'ordre $3n$.

Total i. : 1 pt

ii. La matrice A est unitaire si $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^*$ c'est-à-dire si

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathbb{I}_{3n} \tag{1}$$

Connaissance du concept de matrice unitaire : 2 pts

Dans ce cas, on a aussi $\mathsf{AA}^* = \mathbb{I}_{3n}$ puisque, A étant une matrice carrée, si l'inverse à gauche existe, elle est unique et égale à l'inverse à droite.

Justification ou vérification ultérieure de $\mathsf{AA}^* = \mathbb{I}$ (ou $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathbb{I}$) : 1 pt

Comme

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{P} & 0 & 0 \\ \mathsf{Q} & \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathsf{R} & \mathsf{S} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

on a

$$\mathsf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathsf{P}^* & \mathsf{Q}^* & \mathsf{R}^* \\ 0 & \mathbb{I}_n & \mathsf{S}^* \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

Expression de A^* : 2 pts

Puisque les matrices $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}$ et S sont toutes d'ordre n et peuvent être multipliées entre elles ou avec leur adjointe, la condition (1) s'écrit

Expression de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ (ou AA^*) : 2 pts

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}^*\mathsf{P} + \mathsf{Q}^*\mathsf{Q} + \mathsf{R}^*\mathsf{R} & \mathsf{Q}^* + \mathsf{R}^*\mathsf{S} & \mathsf{R}^* \\ \mathsf{Q} + \mathsf{S}^*\mathsf{R} & \mathbb{I}_n + \mathsf{S}^*\mathsf{S} & \mathsf{S}^* \\ \mathsf{R} & \mathsf{S} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{3n} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

dont on déduit immédiatement que

$$\mathsf{R} = \mathsf{S} = 0$$

puis, en considérant les blocs $(1,2)$ et $(2,1)$,

$$\mathsf{Q} = 0$$

et, enfin,

$$\mathsf{P}^*\mathsf{P} = \mathbb{I}_n$$

Pour que A soit unitaire, elle doit donc être de la forme

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{P} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathsf{P} \text{ est unitaire.}$$

Q, R et S nulles : 1 pt
P unitaire : 1 pt

Total ii. : 9 pts
TOTAL QII : 10 PTS

Question III

i. La matrice D étant réelle ($\overline{\mathsf{D}} = \mathsf{D}$) et diagonale ($\mathsf{D}^\mathrm{T} = \mathsf{D}$), on a $\mathsf{D}^* = \mathsf{D}$ et donc

$$(\mathsf{A}^*\mathsf{D}\mathsf{A})^* = \mathsf{A}^*\mathsf{D}^*(\mathsf{A}^*)^* = \mathsf{A}^*\mathsf{D}\mathsf{A}$$

ce qui démontre le caractère hermitien de la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{D}\mathsf{A}$.

Connaissance du concept de matrice hermitienne : 1 pt
Démonstration : 2 pts
Total i. : 3 pts

ii. (a) Exprimons la relation $\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T}) = 0$ en fonction des éléments de la matrice A. On a

$$(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\mathsf{A}^\mathrm{T})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

et

$$\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

Cette double somme ne faisant intervenir que des termes positifs ne peut être nulle que si tous les éléments de la matrice A sont nuls, *i.e.* si $\mathsf{A} = 0$.

(b) La relation $\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{X}) = \operatorname{trace}(\mathsf{B}\mathsf{X})$ peut encore s'écrire

$$\operatorname{trace}[(\mathsf{A}-\mathsf{B})\mathsf{X}] = 0$$

Cette relation étant vérifiée quelle que soit la matrice X, on peut en particulier choisir $\mathsf{X} = (\mathsf{A}-\mathsf{B})^\mathrm{T}$ et écrire

$$\operatorname{trace}[(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}-\mathsf{B})^\mathrm{T}] = 0$$

En utilisant le résultat du point (a), on en déduit donc que $\mathsf{A}-\mathsf{B} = 0$ c'est-à-dire $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.

Connaissance de la formule du produit matriciel : 1 pt
Expression des éléments de $\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T}$: 1 pt
Connaissance de la notion de trace : 1 pt
Expression correcte de la trace de $\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T}$: 1 pt
Conclusion correcte si correctement justifiée : 1 pt
Total (a) : 5 pts
Total (b) : 2 pts
Les points ne sont pas accordés si la conclusion se base uniquement sur $\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}x_{ki} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n b_{ik}x_{ki}$.
Total ii. : 7 pts

iii. Si A est une matrice d'ordre n, on a

$$\det\left(\mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathsf{A}\right) = (\mathrm{e}^{i\pi/4})^n \det\mathsf{A} = \mathrm{e}^{in\pi/4}\det\mathsf{A}$$

Dès lors, la condition énoncée s'écrit

$$\det\left(\mathrm{e}^{i\pi/4}\,\mathsf{A}\right) = \mathrm{e}^{in\pi/4}\det\mathsf{A} = -\det\mathsf{A}$$

Cette condition est vérifiée si

$$\det\mathsf{A} = 0 \quad \text{ou si} \quad \mathrm{e}^{in\pi/4} = -1$$

Les matrices A vérifiant la relation donnée sont donc toutes les matrices singulières et toutes les matrices d'ordre n où n vérifie

$$\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4) = -1$$

c'est-à-dire $n\pi/4 = \pi + 2k\pi$ et donc $n = 4+8k$, $k \in \mathbb{N}$.

Extraction correcte du facteur $\mathrm{e}^{i\pi/4}$: 1 pt
Matrices singulières : 1 pt
Matrices d'ordre $n = 4+8k$, $k \in \mathbb{N}$ (ou $= 4$, 12, ...) : 2 pts
Considérer $k \in \mathbb{Z}$ et donc $n < 0$: -0.5 pt
Total iii. : 4 pts
TOTAL QIII : 14 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées.

  Puisqu'il est aussi demandé d'identifier les relations linéaires entre les colonnes de la matrice, il faut privilégier les opérations sur les lignes par rapport à la manipulation des colonnes. Si des opérations élémentaires sont effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Si, par contre, des opérations élémentaires sont effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées.
- Pour échelonner une matrice, il faut procéder avec ordre et méthode. Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.
- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

  ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.
- Le rang d'une matrice est aussi égal à l'ordre de la plus grande matrice non singulière que l'on peut extraire de la matrice de départ, éventuellement après des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice. Il faut être attentif au fait que, par exemple, pour pouvoir affirmer que le rang de la matrice est égal à 3, il faut avoir vérifié que toutes les sous-matrices d'ordre 4 que l'on peut extraire de la matrice de départ — qui sont au nombre de 5 dans le cas qui nous occupe — sont singulières.
- Le nombre de relations linéaires entre les colonnes de la matrice est égal au nombre de ses colonnes diminué du rang de la matrice. Ici, le rang de la matrice étant égal à 3. Il y a donc deux relations linéaires entre les 5 colonnes de la matrice.

- Quand l'échelonnage de la matrice requiert un échange de deux colonnes, il faut en tenir compte quand on exprime les relations linéaires entre les colonnes.
- Les matrices successives obtenues suite aux opérations élémentaires effectuées ne sont pas égales entre elles, même si certaines propriétés (comme le rang) de ces matrices sont conservées. On ne peut donc écrire un symbole d'égalité entre ces matrices successives.

Question II

- La matrice A est constituée de blocs carrés d'ordre n. Il ne faut pas confondre ces blocs avec des nombres. En particulier, la matrice A est une matrice carrée d'ordre $3n$, pas une matrice carrée d'ordre 3 et $\mathbb{I}$ est la matrice identité d'ordre n, pas le nombre 1.
- Pour conjuguer et transposer la matrice, il faut conjuguer et transposer tous les blocs et il faut aussi transposer la structure globale de la matrice en déplaçant les blocs symétriquement par rapport à la diagonale principale.
- Le produit matriciel n'est pas commutatif. Il n'est pas permis de permuter les matrices intervenant dans un produit matriciel.
- Il n'est pas non plus permis d'introduire l'inverse d'une matrice (par exemple pour simplifier une équation en la multipliant par cette inverse) si on n'a pas préalablement démontré le caractère non singulier de cette matrice. En particulier ici, l'existence des matrices Q^{-1}, R^{-1} et S^{-1} n'est pas garantie par les conditions fixées dans l'énoncé.

Question III

i.
- Les démonstrations faisant intervenir des produits matriciels ne demandent pas toujours d'exprimer les éléments de ces matrices. Il est parfois tout à fait possible de démontrer une proposition en manipulant simplement les matrices. Il fallait ici se souvenir que l'adjointe d'un produit matriciel est égale au produit des adjointes de ces matrices évalué dans l'ordre inverse.
- La matrice diagonale D est égale à son adjointe car elle est symétrique (donc égale à sa transposée) et réelle (donc égale à sa conjuguée). Les deux hypothèses devaient être prises en compte.

ii. (a)
- Cette question devait être résolue en exprimant explicitement les éléments de la matrice AA^T puis sa trace. Il faut utiliser des notations correctes. En particulier, les éléments d'une matrice doivent être notés avec deux indices, un pour la ligne et un pour la colonne.
- L'expression attendue de la $\operatorname{trace}(\mathsf{AA}^\mathsf{T})$ comportait une double somme. Une première somme provenait du produit matriciel puisque, pour exprimer l'élément ij de la matrice produit, il faut faire la somme des produits des éléments de la ligne i de la matrice A et de la colonne j de la matrice A^T. Une deuxième somme provenait du calcul de la $\operatorname{trace}(\mathsf{AA}^\mathsf{T})$ qui est la somme des éléments diagonaux de la matrice AA^T.

(b)
- Il fallait penser à utiliser le résultat démontré au point (a) pour démontrer facilement la proposition du point (b).
- De
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_{ki}$$
on ne peut pas déduire que $a_{ik} = b_{ik}$ (et donc $\mathsf{A} = \mathsf{B}$) sans faire intervenir le fait que cette relation est vérifiée quelle que soit la matrice X.

◇ Il n'est bien sûr pas permis de simplifier par x_{ki} ni par $\sum_{i=1}^{n}$ et $\sum_{k=1}^{n}$.

◇ Il n'est pas non plus correct de déduire de l'égalité de deux sommes (ou doubles sommes ici) que les termes correspondants sont égaux.

◇ On ne peut pas non plus déduire d'une somme nulle que tous les termes de cette somme sont nuls :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}-b_{ik})x_{ki}=0 \quad \not\Rightarrow \qquad (a_{ik}-b_{ik})x_{ki}=0$$

iii.

- Quand on calcule un déterminant en extrayant un facteur d'une matrice, il ne faut pas oublier que celui-ci multiplie toutes les rangées de la matrice et se retrouve donc affecté d'un exposant égal à l'ordre de la matrice, *i.e.*

$$\det(\lambda \mathsf{A}) = \lambda^n \det \mathsf{A}$$

Ici, on a

$$\det\left(e^{i\pi/4}\,\mathsf{A}\right) = e^{in\pi/4}\det \mathsf{A}$$

- La propriété énoncée conduit à la condition

$$e^{in\pi/4}\det \mathsf{A} = -\det \mathsf{A}$$

Il ne faut pas oublier la solution $\det \mathsf{A} = 0$ qui indique que toutes les matrices singulières vérifient l'équation (et pas seulement la matrice $\mathsf{A} = 0$).

- Afin de résoudre l'équation $e^{in\pi/4} = -1$, il est judicieux d'exprimer l'exponentielle imaginaire au moyen des fonctions sinus et cosinus, c'est-à-dire

$$\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4) = -1$$

- La résolution de cette équation donne $n = 4+8k$, où k est un naturel quelconque mais pas un entier négatif. En effet, n est l'ordre de la matrice A et ne peut donc pas être un nombre négatif.
- Remarquons qu'une exponentielle imaginaire peut être négative, contrairement aux exponentielles réelles.