Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2025

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Simplifiez au maximum l'expression

$$\left[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\right]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux de l'espace physique $\mathcal{E}$.

ii. Si w désigne une matrice colonne dont les n éléments réels $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1$, démontrez que la matrice $\mathsf{A} = \mathbb{I}_n - 2\mathsf{w}\mathsf{w}^\mathrm{T}$ est orthogonale.

iii. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ vers un espace vectoriel $\mathtt{F}$.

(a) Définissez $\ker\mathcal{A}$.

(b) Montrez que, si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants et orthogonaux à chacun des vecteurs de $\ker\mathcal{A}$, alors, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ sont linéairement indépendants.

iv. On considère une matrice carrée A d'ordre n pouvant être transformée en une matrice diagonale D par une transformation de similitude au moyen d'une matrice de transformation S.

(a) Précisez la nature des éléments de D.

(b) Exprimez A, A^2 et A^n en fonction de D et de S.

(c) Montrez que A annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire que si

$$p(\lambda) = \det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{I}) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

alors

$$p(\mathsf{A}) = (-1)^n\mathsf{A}^n + a_{n-1}\mathsf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathsf{A} + a_0\mathbb{I} = 0$$

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ x+2ay+z=a \\ y+az=0 \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $a\in\mathbb{R}$.

Tournez la page.

Question III

Le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire la déformation locale d'un matériau en raison des forces qui lui sont appliquées. Si on considère un élément de matière initialement de longueur ℓ_0 et aligné avec la direction $\mathbf{e}$ (le vecteur $\mathbf{e}$ étant unitaire) avant l'application des forces, sa longueur ℓ dans la configuration déformée produite par l'application des forces est donnée par

$$\ell = \ell_0(1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e})$$

Dans une base orthonormée particulière ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), on détermine les composantes E du tenseur des déformations sous la forme

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_0 > 0$ est une constante connue et où α est un paramètre réel inaccessible à l'expérience.

i. Montrez qu'il n'existe pas de valeur de α telle que tous les éléments de matière subissent une élongation positive quelle que soit la direction $\mathbf{e}$ considérée. Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, une base orthonormée dans laquelle le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est représenté par une matrice diagonale. Donnez l'expression de cette matrice diagonale.

Question I

i. En exploitant la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned}\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})&\\ &=\Big[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &=(\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ &=2\end{aligned}$$

puisque, **a** et **b** étant unitaires,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2=1 \quad\text{et}\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|^2=1$$

et, **a** et **b** étant orthogonaux,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=0$$

ii. Pour être orthogonale, la matrice A doit être réelle, ce qui est évident ici, et telle que $\mathsf{A}^{-1}=\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$. Il reste donc à montrer que

$$\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathrm{T}}=\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}=\mathbb{I}_n$$

On a

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}=(\mathbb{I}_n-2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbb{I}_n-2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}=\mathsf{A}$$

et

$$\begin{aligned}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathrm{T}}=\mathsf{A}\,\mathsf{A}=\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}&=(\mathbb{I}_n-2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}})(\mathbb{I}_n-2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}})\\ &=\mathbb{I}_n\mathbb{I}_n-2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathbb{I}_n-\mathbb{I}_n2\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}+4\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\\ &=\mathbb{I}_n-4\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}+4\mathrm{w}(\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{w})\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{w}=\sum_{i=1}^{n}w_i^2=1$$

donc

$$\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathrm{T}}=\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}=\mathbb{I}_n-4\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}+4\mathrm{w}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}=\mathbb{I}_n$$

La matrice A est donc bien orthogonale.

iii. (a) L'ensemble $\ker\mathcal{A}$ est le noyau de l'application linéaire $\mathcal{A}$ défini par

$$\ker\mathcal{A}=\{\mathbf{x}\in\mathtt{E}:\mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}$$

(b) Pour étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$, on considère la relation

$$\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)+\lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)+\ldots+\lambda_k\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)=\mathbf{0}$$

Vu la linéarité de l'opérateur $\mathcal{A}$, elle équivaut à

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k)=\mathbf{0}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in \ker \mathcal{A}$$

Par hypothèse, on a cependant aussi

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in (\ker \mathcal{A})^\perp$$

de sorte que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in \ker \mathcal{A} \cap (\ker \mathcal{A})^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ étant linéairement indépendants, on en déduit que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

ce qui assure l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$.

iv. (a) On a $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S} = \mathsf{D}$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, les valeurs propres de multiplicité supérieure à 1 étant répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité.

(b) On a

$$\mathsf{A} = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1}$$

et

$$\mathsf{A}^2 = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1} = \mathsf{S}\mathsf{D}^2\mathsf{S}^{-1}$$

De même, il vient également

$$\mathsf{A}^n = (\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1})^n = (\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1})(\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1})\cdots(\mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1}) = \mathsf{S}\mathsf{D}^n\mathsf{S}^{-1}$$

(c) On peut donc écrire

$$p(\mathsf{A}) = (-1)^n \mathsf{S}\mathsf{D}^n\mathsf{S}^{-1} + a_{n-1}\mathsf{S}\mathsf{D}^{n-1}\mathsf{S}^{-1} + \cdots + a_1 \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^{-1} + a_0 \mathbb{I} = \mathsf{S}\, p(\mathsf{D})\, \mathsf{S}^{-1}$$

Comme $\mathsf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\mathsf{D}^k = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ et

$$\begin{aligned} p(\mathsf{D}) = (-1)^n \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n) &+ a_{n-1} \operatorname{diag}\left(\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_n^{n-1}\right) \\ &+ \cdots \quad + a_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + a_0 \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Ainsi, $p(\mathsf{D})$ est aussi une matrice diagonale dont l'élément ii est

$$(-1)^n \lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda_i + a_0 = p(\lambda_i)$$

Or, $p(\lambda_i) = 0$ puisque λ_i est un zéro du polynôme caractéristique. Il en résulte que tous les éléments de $p(\mathsf{D})$ sont nuls, donc que $p(\mathsf{A})$ est une matrice nulle également, de sorte que A annule son polynôme caractéristique.

Question II

Le système à résoudre s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

On a

$$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 2a-2 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

- Si $a \neq 1$, on continue l'échelonnage en divisant la deuxième ligne par $2a-2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

  Ensuite,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & a+(1/2) & -1/2 \end{array}\right) \tag{$**$}$$

  ◇ Si $a \neq -1/2$, on continue l'échelonnage en divisant la toisième ligne par $a+(1/2)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/(2a+1) \end{array}\right)$$

  Ensuite,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - (a+1)\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 + \ell_3/2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{a+1}{2a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4a+2} = \dfrac{2a+1-1}{4a+2} = \dfrac{a}{2a+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{2a+1} \end{array}\right)$$

  Le système possède alors la solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2a+1} \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \tag{$\clubsuit$}$$

  ◇ Si $a = -1/2$, la matrice $(**)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

  et le système est incompatible.

- Si $a=1$, la matrice $(*)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On continue l'échelonnage en échangeant les deux dernières lignes,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ensuite,

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solution du système est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{$\heartsuit$}$$

En conclusion,

- si $a \notin \{1, -1/2\}$, la solution est unique et donnée par ($\clubsuit$) ;
- si $a=1$, les solutions sont données par ($\heartsuit$) ;
- si $a=-1/2$, le système est incompatible.

Question III

i. L'élongation d'un élément de matière est positive quelle que soit sa direction $\mathbf{e}$ si

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} > 0 \qquad \forall \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$$

soit, dans la base considérée,

$$\mathsf{e}^{\mathrm{T}}\, \mathsf{E}\, \mathsf{e} > 0 \qquad \forall \mathsf{e} \neq 0$$

i.e. si E est définie positive.

Par le critère de Sylvester, la matrice E étant symétrique, ceci est le cas si et seulement si

$$\varepsilon_0 \det\big(\alpha\big) = \alpha\,\varepsilon_0 > 0, \qquad \varepsilon_0^2 \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \varepsilon_0^2(-2\alpha - 4) > 0$$

et

$$\varepsilon_0^3 \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = -2\varepsilon_0^3\,(\alpha^2 + 4\alpha + 3) > 0$$

Les deux premières conditions étant incompatibles, on en déduit qu'il n'existe aucune valeur de α telle que tous les éléments de matière subissent une élongation positive quelle que soit la direction $\mathbf{e}$ considérée.

ii. Dans le cas $\alpha = 1$, on a

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est représenté par une matrice diagonale dans une base orthonormée formée des vecteurs propres de E.

Déterminons les valeurs propres de E. Au facteur ε_0 près, elles sont égales aux valeurs propres de $(1/\varepsilon_0)\mathsf{E}$, soit aux zéros de

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

Les valeurs propres de E sont donc $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = -4\varepsilon_0$ (de multiplicité 1).

Cherchons les vecteurs propres relatifs à $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$. Ce sont les solutions non nulles de $(\mathsf{E}-\lambda_1\mathbb{I})\mathsf{w} = 0$, soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par des opérations élémentaires, la matrice des coefficients peut être transformée selon

$$(\ell_1 \to -\ell_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} (\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1) \\ (\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc

$$\mathsf{w} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (\beta,\gamma) \neq (0,0)$$

Cherchons les vecteurs propres relatifs à $\lambda_2 = -4\varepsilon_0$. Ceux-ci sont les solutions non nulles de $(\mathsf{E}-\lambda_2\mathbb{I})\mathsf{w} = 0$, soit

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on échelonne la matrice des coefficients en commençant par permuter les lignes 1 et 3 (pour éviter les divisions) et en changeant le signe de la première ligne ainsi obtenue ; on part donc de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Il vient ensuite successivement

$$\begin{matrix} (\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1) \\ (\ell_3 \to \ell_3 - 5\ell_1) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$(\ell_2 \to \ell_2/6) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2) \\ (\ell_3 \to \ell_3 - 12\ell_2) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc

$$\mathsf{w} = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \delta \neq 0$$

Pour construire une base orthonormée formée de vecteurs propres de E, il faut prendre 3 vecteurs orthonormés parmi ceux identifiés ci-dessus. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres

différentes étant orthogonaux, puisque E est symétrique, il suffit d'identifier deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $2\varepsilon_0$ et de compléter la base avec un vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre $-4\varepsilon_0$.
Les vecteurs propres relatifs à $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$ et de composantes

$$\mathsf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

peuvent être orthonormés en utilisant la méthode de Gram-Schmidt. On calcule successivement

$$\mathsf{w}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis, pour le second vecteur,

$$\mathsf{w}_2 - (\mathsf{w}_1'^{\mathsf{T}} \mathsf{w}_2)\, \mathsf{w}_1' = \mathsf{w}_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\, \mathsf{w}_1' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et, en divisant par la norme,

$$\mathsf{w}_2' = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour le troisième vecteur de base, on obtient directement

$$\mathsf{w}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{w}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{30}} (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{w}_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{cases}$$

constituent une base orthonormée dans laquelle le tenseur est représenté par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon_0 \end{pmatrix}$$