

*Durée de l'épreuve : 3 heures 30.  
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

### Question I

- i. Si les éléments  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  d'un espace vectoriel  $E$  sont linéairement indépendants, les éléments  $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{m}, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{m}\}$  avec

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$$

sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez.

- ii. Évaluez  $\mathcal{F} \equiv [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{b}]$  où  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  désignent des vecteurs orthonormés de l'espace physique. Justifiez les manipulations effectuées.
- iii. Définir le concept de solution au sens des moindres carrés du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Indiquez (sans justification) comment cette solution peut être obtenue.
- iv. On considère l'application  $\mathcal{A}$  définie d'un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n \geq 2$  vers lui-même par

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$$

où  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  est un vecteur fixe de  $E$ .

- (a) Montrez que  $\mathcal{A}$  est une application linéaire.
- (b) Déterminez  $\rho(\mathcal{A})$ .
- (c) L'application  $\mathcal{A}$  possède-t-elle une inverse à gauche ou une inverse à droite ? Justifiez.
- (d) Déterminez la matrice  $A$  représentant  $\mathcal{A}$  dans la base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  dans laquelle  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ .
- (e) Caractérisez  $\ker(\mathcal{A})$ . Quelle est la dimension de  $\ker(\mathcal{A})$  ?

### Question II

Résolvez dans  $\mathbb{R}$  et discutez en fonction des paramètres réels  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 3 \\ ax + 2y - z = b \end{cases}$$

### Question III

Le tenseur d'inertie d'un solide en un point B, noté  $\mathbf{J}_B$ , mesure l'inertie du solide pour sa rotation autour de n'importe quel axe passant par B. Dans toute base orthonormée, les composantes de  $\mathbf{J}_B$  sont données par

$$\begin{pmatrix} \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dx dy dz & -\iiint_V \rho xy dx dy dz & -\iiint_V \rho xz dx dy dz \\ -\iiint_V \rho xy dx dy dz & \iiint_V \rho(x^2 + z^2) dx dy dz & -\iiint_V \rho yz dx dy dz \\ -\iiint_V \rho xz dx dy dz & -\iiint_V \rho yz dx dy dz & \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \end{pmatrix}$$

où  $\rho$  désigne la masse par unité de volume et où l'intégration est réalisée sur le volume  $V$  du corps.

- De la forme générale de la représentation matricielle de  $\mathbf{J}_B$  donnée ci-dessus, peut-on déduire qu'il existe une base orthonormée dans lequel  $\mathbf{J}_B$  est représenté par une matrice diagonale? Justifiez.
- Dans le cas où  $\mathbf{J}_B$  est représenté, dans la base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , par la matrice

$$mR^2 \begin{pmatrix} 3 - \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où } m > 0,$$

déterminez la condition sur le paramètre réel  $\alpha$  pour que l'énergie cinétique de rotation autour du point B, définie par

$$T_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_B \cdot \boldsymbol{\omega}$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur de Poisson du solide, vérifie la contrainte physique

$$T_B > 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$$

- Dans le cas particulier où  $\alpha = 1$ , déterminez, en fonction de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ , l'expression de vecteurs  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{E}_3$  formant une base orthonormée dans laquelle  $\mathbf{J}_B$  est représenté par une matrice diagonale. Déterminez l'expression de cette matrice diagonale ainsi que celle de la matrice de transformation correspondant au passage d'une base à l'autre.
- Déterminez la (les) direction(s) pour laquelle (lesquelles) le solide possède la plus grande énergie cinétique pour une vitesse de rotation  $\|\boldsymbol{\omega}\|$  donnée.

Question I

- i. Les vecteurs  $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{m}, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{m}\}$  sont linéairement indépendants si l'égalité

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}) + \lambda_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{m}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}) = \mathbf{0}$$

n'est possible que pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Or, si on choisit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ , on a

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}) + \lambda_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{m}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n) - n \mathbf{m} = \mathbf{0}$$

puisque

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$$

On en déduit que les vecteurs  $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{m}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{m}, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{m}\}$  sont linéairement dépendants.

- ii. L'expression  $\mathcal{F}$  proposée est le produit mixte des vecteurs  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$  et  $\mathbf{b}$ . Il s'agit du scalaire

$$\mathcal{F} = ((\mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \cdot \mathbf{b}$$

En vertu de la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition, ce produit peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (\mathbf{b} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{c} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \cdot \mathbf{b} \\ &= 0 + (\mathbf{c} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

puisque le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à ces vecteurs. En développant le double produit vectoriel, on obtient

$$\mathcal{F} = (\mathbf{c} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \cdot \mathbf{b} = ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) = 1$$

puisque les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont orthonormés, c'est-à-dire tels que  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$ ,  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$  et  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ .

- iii. La solution au sens des moindres carrés d'un problème linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  incompatible est donnée par

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

Cette solution est celle qui minimise la norme du résidu  $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$  formé en considérant l'écart entre les deux membres de l'équation linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Un élément  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  est une solution au sens des moindres carrés du système incompatible

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où  $A \in \mathbb{R}_n^m$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  si et seulement s'il vérifie les équations normales

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

De façon alternative, la solution au sens des moindres carrés peut être obtenue sous la forme

$$\hat{\mathbf{x}} = A^+ \mathbf{b}$$

où  $A^+$  désigne la matrice pseudo-inverse de  $A$ .

- iv. (a)  $\mathcal{A}$  définit une application linéaire sur l'espace vectoriel  $E$  si, pour tous vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $E$  et tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  de  $\mathbb{C}$ , on a

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu\mathcal{A}(\mathbf{y})$$

Pour  $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}|\mathbf{a})\mathbf{a} \\ &= \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a} + \mu(\mathbf{y}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu\mathcal{A}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

en vertu de la sesquilinearité du produit scalaire.

La définition proposée est donc bien celle d'une application linéaire.

- (b) On a

$$\rho(\mathcal{A}) = \dim(\text{im } \mathcal{A}) \leq 1$$

puisque tous les vecteurs appartenant à  $\text{im } \mathcal{A}$  s'écrivent  $(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$  et sont donc multiples du seul vecteur  $\mathbf{a}$  non nul.

Par ailleurs,  $\text{im } \mathcal{A}$  contient au moins un vecteur non nul puisque,  $\mathbf{a}$  étant non nul, on a

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

Dès lors, il vient  $\rho(\mathcal{A}) = 1$ .

- (c) L'application linéaire est définie de l'espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$  vers lui-même. Puisque  $\rho(\mathcal{A}) = 1 \neq n$ , l'application linéaire n'est ni injective ni surjective. On ne peut donc définir d'inverse ni à gauche ni à droite.
- (d) La matrice  $A$  est formée en disposant colonne par colonne les composantes des images des vecteurs de base par l'application linéaire. Les éléments de la  $j$ -ème colonne de  $A$  sont donc obtenus en considérant

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) &= (\mathbf{e}_j|\mathbf{a})\mathbf{a} \\ &= \left( \mathbf{e}_j \middle| \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \right) \mathbf{a} = \left[ \sum_{i=1}^n \overline{a_i} (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_i) \right] \mathbf{a} = \left[ \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \delta_{ji} \right] \mathbf{a} \\ &= \overline{a_j} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{a_j} \mathbf{e}_i\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que les vecteurs de base forment une base orthonormée.

Dans la base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , l'application  $\mathcal{A}$  est donc représentée par la matrice  $A$  dont les éléments sont

$$A_{ij} = a_i \overline{a_j}$$

- (e) Par définition, les vecteurs  $\mathbf{x}$  du noyau de  $\mathcal{A}$  sont tels que  $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , soit

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Le vecteur  $\mathbf{a}$  étant non nul, les vecteurs du noyau sont tels que

$$(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = 0$$

Il s'agit donc de tous les vecteurs orthogonaux à  $\mathbf{a}$ . En d'autres termes,  $\ker(\mathcal{A})$  est le complément orthogonal du sous-espace vectoriel de  $E$  généré par le vecteur  $\mathbf{a}$ . En vertu du théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \ker(\mathcal{A}) + \rho(\mathcal{A})$$

qui s'écrit ici

$$n = \dim \ker(\mathcal{A}) + 1$$

La dimension de  $\ker(\mathcal{A})$  vaut donc  $n - 1$ .

## Question II

Le système à résoudre s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$$

Pour tester la compatibilité de ce système et le résoudre, on cherche une forme normale échelonnée de

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 3 \\ a & 2 & -1 & b \end{array} \right)$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned} \ell_1 &\rightarrow \ell_1/2 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a/2 & 1/2 & 3/2 \\ a & 2 & -1 & b \end{array} \right) \\ \ell_2 &\rightarrow \ell_2 - a\ell_1 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 - \frac{a^2}{2} & -1 - \frac{a}{2} & b - \frac{3a}{2} \end{array} \right) \\ \text{c'est-à-dire} &&& \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & (4 - a^2)/2 & -(2 + a)/2 & (2b - 3a)/2 \end{array} \right) \\ \ell_2 &\rightarrow 2\ell_2 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 4 - a^2 & -(2 + a) & 2b - 3a \end{array} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

◇ Si  $a \notin \{-2, 2\}$ , on a

$$\begin{aligned} \ell_2 &\rightarrow \ell_2/(4 - a^2) && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/(a - 2) & (2b - 3a)/(4 - a^2) \end{array} \right) \\ \ell_1 &\rightarrow \ell_1 - a\ell_2/2 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/(a - 2) & (6 - ab)/(4 - a^2) \\ 0 & 1 & 1/(a - 2) & (2b - 3a)/(4 - a^2) \end{array} \right) \end{aligned}$$

La solution s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4 - a^2} \begin{pmatrix} 6 - ab \\ 2b - 3a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/(a - 2) \\ -1/(a - 2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\heartsuit)$$

◇ Si  $a = 2$ , on repart de la matrice (\*) et on cherche une forme normale échelonnée de

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -4 & 2b - 6 \end{array} \right) \\ c_2 &\leftrightarrow c_3 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & -4 & 0 & 2b - 6 \end{array} \right) \\ \ell_2 &\rightarrow \ell_2/-4 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & (6 - 2b)/4 \end{array} \right) \\ \ell_1 &\rightarrow \ell_1 - \ell_2/2 && \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & (3 + b)/4 \\ 0 & 1 & 0 & (6 - 2b)/4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Le système admet donc la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+b \\ 6-2b \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+b \\ 0 \\ 6-2b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (\clubsuit)$$

◇ Si  $a = -2$ , on repart de la matrice (\*) et on cherche une forme normale échelonnée de

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b+6 \end{array} \right) \quad (**)$$

de sorte que le système est incompatible quand  $b \neq -3$ .

Si  $b = -3$ , (\*\*) s'écrit

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La solution du système est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\diamond)$$

En conclusion,

- si  $a \neq \pm 2$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$ , les solutions sont données par ( $\heartsuit$ );
- si  $a = 2$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$ , les solutions sont données par ( $\clubsuit$ );
- si  $a = -2$ , le système est incompatible si  $b \neq -3$  et possède la solution ( $\diamond$ ) si  $b = -3$

Notons que, en menant l'élimination de Gauss d'une façon différente, on peut exprimer les solutions ( $\heartsuit$ ) et ( $\clubsuit$ ) sous la forme unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b+3}{a+2} \\ \frac{6-ab}{a+2} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a-2 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

valable quel que soit  $a \neq -2$ , sans qu'il ne soit nécessaire de distinguer le cas  $a = 2$  du cas général.

### Question III

- La matrice d'ordre 3 représentant  $\mathbf{J}_B$  dans une base quelconque est symétrique, donc normale. Dès lors, elle possède 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux permettant de définir un repère orthonormé dans lequel  $\mathbf{J}_B$  est représenté par une matrice diagonale.
- L'énergie cinétique  $T_B$  est strictement positive quel que soit le vecteur de Poisson  $\omega$  non nul si et seulement si la matrice  $\mathbf{J}_B$  est définie positive.

Par le critère de Sylvester, ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de la matrice symétrique  $\mathbf{J}_B$  sont strictement positifs, c'est-à-dire ssi

$$mR^2(3-\alpha) > 0, \quad (mR^2)^2 \begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3(mR^2)^2(3-\alpha) > 0$$

et

$$\det J_B = (mR^2)^3 \begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1+\alpha \end{vmatrix} = 3(mR^2)^3(-2\alpha^2 + 2\alpha + 3) > 0$$

Les deux premières conditions sont vérifiées si  $\alpha < 3$ .

Quant au déterminant de  $J_B$ , il est strictement positif pour

$$\alpha \in \left] \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right[$$

qui constitue la condition la plus restrictive et la réponse à la question posée.

- iii. Le tenseur  $\mathbf{J}_B$  est représenté par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice  $J_B$ . Il faut choisir des vecteurs propres orthogonaux et normés pour que la base soit orthonormée.

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , la matrice  $J_B$  s'écrit

$$J_B = mR^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Recherche des valeurs propres de  $J_B$*

Les valeurs propres de  $J_B$  s'obtiennent en multipliant par  $mR^2$  les valeurs propres de  $J'_B = J_B/mR^2$ . Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (\lambda-3)^2(1-\lambda)$$

Ainsi, la matrice  $J_B$  possède la valeur propre double  $3mR^2$  et la valeur propre simple  $mR^2$ .

*Recherche des vecteurs propres de  $J_B$*

Ce sont les mêmes que ceux de la matrice  $J'_B = J_B/mR^2$ .

- ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre  $\lambda = 1$  de  $J'_B$  sont les solutions  $w_1$  non nulles de

$$(J'_B - \mathbb{I})w_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée

$$l_3 \rightarrow l_3 + l_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \rightarrow l_2/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$w_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

et

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

- ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre  $\lambda = 3$  de  $J'_B$  sont les solutions  $w_2$  non nulles de

$$(J'_B - 3\mathbb{I})w_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée

$$l_3 \rightarrow l_3 - l_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_1 \rightarrow -l_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R} \text{ avec } (\gamma_2, \gamma_3) \neq (0, 0)$$

Parmi tous les vecteurs propres, on peut choisir les vecteurs orthogonaux et normés

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

Les vecteurs  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{E}_3$  constituent une base orthonormée. En effet,  $\mathbf{E}_1$  est aussi orthogonal à  $\mathbf{E}_2$  et à  $\mathbf{E}_3$  en tant que vecteur propre relatif à une autre valeur propre de l'application linéaire normale  $\mathbf{J}_B$ .

La matrice diagonale s'écrit

$$mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transformation permettant de passer d'une base à l'autre s'écrit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ses colonnes sont constituées des composantes des vecteurs propres orthogonaux et normés  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  dans la base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

- iv. Le solide possède la plus grande énergie cinétique dans la (les) direction(s) du (des) vecteur(s) propre(s) relatif(s) à sa plus grande valeur propre ( $\lambda = 3mR^2$ ). Il s'agit donc ici de toutes les directions du plan défini par les vecteurs

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$