LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

ÉVALUATION FORMATIVE

Octobre 2025

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de trois heures.

Question I

i. Peut-on affirmer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]0,1[$ est bornée sur $]0,1[$? Justifiez.

ii. A- Laquelle des expressions ci-dessous traduit $f(x) = o\Big(g(x)\Big), \quad (x \to +\infty)$?

a. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \geq N) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$

b. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \geq N) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

c. $(\forall N > 0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \geq N) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$

d. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall N > 0)(\forall x \geq N) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

B- Sur base de la définition appropriée, montrez que si

$$f_1(x) = o\Big(g(x)\Big), \ (x \to +\infty) \quad \text{et} \quad f_2(x) = o\Big(g(x)\Big), \ (x \to +\infty)$$

alors

$$f_1(x) + f_2(x) = o\Big(g(x)\Big), \quad (x \to +\infty)$$

Question II

On définit la fonction d'erreur de Gauss par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Cette fonction intervient en probabilité aussi bien que dans l'étude du processus de diffusion.

i. Déterminez l'expression de la dérivée de la fonction erf.

ii. Justifiez théoriquement l'application de la formule de Taylor à l'ordre 3 à la fonction erf au voisinage de $a = 0$.

iii. Déterminez l'expression du polynôme de Taylor $\mathcal{P}_3(x)$ de degré 3 et du reste $\mathcal{R}_3(x)$ correspondant.

iv. Déterminez une constante C majorant l'erreur absolue $|\mathcal{R}_3(x)|$ sur $[0, 0.1]$.

Question III

On considère la fonction V définie par

$$V(x) = \left(f(x) - \frac{1}{f(x)} \right)^2$$

où la fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ est strictement positive et dont la dérivée seconde f'' ne s'annule jamais.

i. Montrez que la fonction V est stationnaire en tout $x \in (\mathtt{E}_1 \cup \mathtt{E}_2)$ où $\mathtt{E}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} : f(x_1) = 1\}$ et $\mathtt{E}_2 = \{x_2 \in \mathbb{R} : f'(x_2) = 0\}$.

ii. Déterminez la nature des points stationnaires de V si $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2 = \emptyset$.

iii. Montrez que V présente un minimum local en tout point $x \in (\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2)$.

Question I

i. Non, on ne peut pas affirmer cela. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Pas de valorisation d'une réponse correcte donnée sans justification

Cette fonction est réelle, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]0,1[$. Cependant,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

de sorte que la fonction f n'est pas bornée dans $V(0)$.

Contre-exemple correct : 2 pts
Justification : 2 pts
Total i. : 4 pts

ii. A- L'expression b. traduit correctement la proposition donnée.

Une fonction f est dite *négligeable* par rapport à une fonction g au voisinage de x_0 si et seulement si f peut être rendue plus petite que n'importe quel multiplie de g à condition de considérer un voisinage approprié de x_0, c'est-à-dire ssi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V(x_0))(\forall x \in V_\varepsilon(x_0)) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ étant un sous-ensemble du type $[N,+\infty[$, il vient

$$f(x) = o\Big(g(x)\Big),\ (x \to +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \geq N) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Total A. : 1 pt (aucune justification attendue)

B- On peut traduire

$$f_1(x) = o\Big(g(x)\Big),\ (x \to +\infty) \quad \text{et} \quad f_2(x) = o\Big(g(x)\Big),\ (x \to +\infty)$$

par

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 > 0)(\forall x \geq N_1) : |f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|g(x)|$$

et

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 > 0)(\forall x \geq N_2) : |f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|g(x)|$$

Traduction des hypothèses : 1 pt
Gestion des $\varepsilon > 0$: 1 pt

En utilisant ces deux propositions, il vient

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = \sup\{N_1,N_2\})(\forall x \geq N) : |f_1(x)+f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

ce qui traduit le fait que

$$f_1(x) + f_2(x) = o\Big(g(x)\Big), \quad (x \to +\infty)$$

Démonstration : 3 pts, dont 1 pt pour $N = \sup\{N_1,N_2\}$ ou $N = \max\{N_1,N_2\}$ et 1 pt pour $|f_1(x)+f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$

Total B. : 5 pts
Total ii. : 6 pts
TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. La fonction
$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$
est la primitive qui s'annule en $x=0$ de la fonction continue $(2/\sqrt{\pi})\,e^{-x^2}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc
$$\frac{d}{dx}\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

Total i. : 2 pts

ii. La fonction erf est une primitive de la fonction
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\in C_\infty(\mathbb{R})$$
Elle est donc réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Dès lors, la fonction d'erreur de Gauss vérifie les hypothèses du théorème de Taylor à un ordre quelconque, et donc en particulier pour $n=3$, sur tout intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x<0$).

f réelle : 1 pt
Justification se basant sur la notion de primitive : 1 pt
$f\in C_\infty(\mathbb{R})$: 1 pt

Total ii : 3 pts

iii. La formule de Taylor à l'ordre 3 au voisinage de $a=0$ s'écrit
$$f(x)=\mathcal{P}_3(x)+\mathcal{R}_3(x)$$
où
$$\mathcal{P}_3(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+\frac{1}{3!}x^3f^{(3)}(0)$$
et
$$\mathcal{R}_3(x)=\frac{1}{4!}x^4f^{(4)}(\xi),\ \xi\in]0,x[\text{ ou }]x,0[$$

Connaissance de la formule de Taylor (mise en pratique ou écrite de façon générale) : 3 pts

On calcule successivement
$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt & f(0)&=0\\
f'(x)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} & f'(0)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\\
f''(x)&=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2} & f''(0)&=0\\
f^{(3)}(x)&=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(2x^2-1)e^{-x^2} & f^{(3)}(0)&=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\\
f^{(4)}(x)&=\frac{8}{\sqrt{\pi}}x(3-2x^2)e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Valeur des dérivées : 2 pts

Remarquons que la fonction erf est impaire et que ses dérivées d'ordre pair sont donc nulles à l'origine. Le polynôme de Taylor au voisinage de l'origine ne comprend dès lors que des puissances impaires de x. À l'ordre 3, on a
$$\operatorname{erf}(x)=\mathcal{P}_3(x)+\mathcal{R}_3(x)$$
où
$$\mathcal{P}_3(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]$$

Polynôme $\mathcal{P}_3$: 3 pts

et
$$\mathcal{R}_3(x)=\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\xi(3-2\xi^2)e^{-\xi^2}x^4,\qquad \xi\in]0,x[\text{ ou }]x,0[$$

Expression de $\mathcal{R}_3$: 3 pts, dont 1.5 pt pour la localisation de ξ
Total iii : 11 pts

iv. Utilisant l'expression $\mathcal{R}_3(x)$ du reste pour $x \in [0, 0.1]$, il vient

$$|\mathcal{R}_3(x)| = \left| \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \xi(3 - 2\xi^2)\, e^{-\xi^2} x^4 \right| < \frac{1}{10^5 \sqrt{\pi}}$$

puisque $0 < |\xi| < x \leq 0.1$, $|e^{-\xi^2}| < 1$ et $|3 - 2\xi^2| < 3$.

Total iv : 2 pt

TOTAL QII : 18 PTS

Question III

i. Soit

$$V(x) = \left(f(x) - \frac{1}{f(x)} \right)^2$$

Remarquons tout d'abord que $V \in C_\infty(\mathbb{R})$ puisque $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ et $f \neq 0$ de sorte que $1/f \in C_\infty(\mathbb{R})$. Les points stationnaires et leur nature peuvent donc être déterminés en étudiant les dérivées successives de V.

$V \in C_\infty(\mathbb{R})$: 1 pt

Les points stationnaires de V sont les solutions de

$$V'(x) = 0$$

Points stationnaires solutions de $V'(x) = 0$: 1 pt

soit

$$V' = 2f' \left(f - \frac{1}{f} \right) \left(1 + \frac{1}{f^2} \right) = 0$$

Comme annoncé, les points stationnaires ont deux origines possibles : les éventuelles solutions $x_1 \in \mathtt{E}_1$ de l'équation

$$f(x_1) = 1$$

et les éventuels points stationnaires de f, *i.e.* les solutions $x_2 \in \mathtt{E}_2$ de

$$f'(x_2) = 0$$

Expression de V' : 1 pt

Identification des deux types de points stationnaires : 1 pt

Total i. : 4 pts

ii. La nature des points stationnaires se déduit de la valeur des dérivées successives de V, à commencer par

Expression de V'' : 1 pt

$$V'' = 2f'^2 \left(1 + \frac{1}{f^2} \right)^2 + 2 \left(f - \frac{1}{f} \right) \left(f'' + \frac{f''}{f^2} - 2\frac{f'^2}{f^3} \right)$$

Nature de $x = x_1$: 2 pts.

A- Considérons les points stationnaires $x_1 \in \mathtt{E}_1$ en lesquels $f(x_1) = 1$. Si on peut supposer que $f'(x_1) \neq 0$, il vient

$$V''(x_1) = 8f'^2(x_1) > 0$$

et V présente un minimum local en x_1.

B- Considérons les points stationnaires $x_2 \in \mathtt{E}_2$ en lesquels $f'(x_2) = 0$. On calcule

Nature de $x = x_2$: 3 pts.

$$V''(x_2) = 2f''(x_2) \left(f(x_2) - \frac{1}{f(x_2)} \right) \left(1 + \frac{1}{f^2(x_2)} \right)$$

Sous l'hypothèse $f(x_2) \neq 1$, le signe de cette expression est celui de

$$f''(x_2) \left(f(x_2) - \frac{1}{f(x_2)} \right)$$

Il y a donc 2 cas à envisager.

- Si $V''(x_2) > 0$, V est minimum. Ce cas se produit si $f''(x_2) > 0$ et $f(x_2) > 1$ ou si $f''(x_2) < 0$ et $f(x_2) < 1$.
- Si $V''(x_2) < 0$, V est maximum. Ce cas se produit si $f''(x_2) > 0$ et $f(x_2) < 1$ ou si $f''(x_2) < 0$ et $f(x_2) > 1$.

Total ii. : 6 pts

iii. Pour tout $x^\star \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$, on a simultanément $f(x^\star) = 1$ et $f'(x^\star) = 0$. Les développements menés plus haut conduisent alors à $V''(x^\star) = 0$, ce qui ne permet pas de préciser la nature du point stationnaire. Il convient alors d'étudier les dérivées d'ordre supérieur. On a

$$\begin{aligned} V^{(3)} &= 6f'\left(1+\frac{1}{f^2}\right)\left(f''+\frac{f''}{f^2}-2\frac{f'^2}{f^3}\right) \\ &\quad + 2\left(f-\frac{1}{f}\right)\left(\frac{6f'^3}{f^4}-\frac{6f'f''}{f^3}+f^{(3)}+\frac{f^{(3)}}{f^2}\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$V^{(3)}(x^\star) = 0$$

En ne développant pas les termes manifestement nuls puisque $f(x^\star) = 1$ et $f'(x^\star) = 0$, on obtient ensuite directement

Nature justifiée de $x^\star$: 2 pts
Total iii. : 2 pts

$$V^{(4)}(x^\star) = 24\Big(f''(x^\star)\Big)^2 > 0$$

Ceci prouve que les points stationnaires $x^\star \in (\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$ sont bien des minima locaux de V.

Remarquons qu'il est aussi possible de raisonner plus simplement pour déterminer la nature de tous les points stationnaires x_1 tels que $f(x_1) = 1$. En effet, d'une part, $V(x) \geq 0$ quel que soit x et, d'autre part, $V(x_1) = 0$. Dès lors, $V(x) \geq V(x_1)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, de sorte que les points $x_1 \in \mathrm{E}_1$ sont des minima (globaux) de V.

Les 4 points relatifs à la nature des positions x_1 sont accordés si ce raisonnement est donné.

TOTAL QIII : 12 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- Pour démontrer qu'un énoncé est faux, il ne suffit pas d'expliquer comment une fonction pourrait ne pas respecter l'énoncé. Il faut donner un contre-exemple pour prouver qu'une telle fonction invalidant l'énoncé existe bel et bien.
  Le contre-exemple doit vérifier les hypothèses, c'est-à-dire ici être une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]0,1[$. Il doit aussi nier la thèse, c'est-à-dire ici ne pas être borné sur $]0,1[$.
  Un exemple qui ne vérifie pas toutes les hypothèses de l'énoncé ne peut servir de base au raisonnement. La fonction $1/x$ n'est pas bornée sur $]0,1[$ mais elle ne vérifie pas toutes les hypothèses puisqu'elle n'est pas définie en $x = 0$. Elle ne constitue donc pas un contre-exemple permettant de démontrer que l'énoncé est faux.

- On sait qu'une fonction continue sur un compact est bornée sur ce compact. Ce théorème n'était cependant d'aucune utilité ici puisqu'on considérait une fonction continue sur un intervalle ouvert et pas sur un compact.

ii.
- Il était explicitement demandé de démontrer la proposition en se basant sur la définition approprié identifiée au point A. Une démonstration du caractère négligeable basée sur la définition par la limite ne répondait donc pas à la question posée. On se souviendra ici que la définition sur base de la limite n'est pas générale ; elle demande de vérifier l'hypothèse supplémentaire que la fonction $g(x)$ n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de $+\infty$ dans le cas qui nous occupe.
- La traduction des hypothèses relatives aux fonctions f_1 et f_2 demandait d'introduire deux entiers N_1 et N_2 différents. La définition du caractère négligeable pouvait alors être appliquée à la somme des deux fonctions en considérant $x \geq \max(N_1, N_2)$.
- Alors qu'un contre-exemple permet de justifier qu'un énoncé est faux, un exemple ne permet jamais de justifier qu'un énoncé est vrai. Pour justifier un énoncé, il faut une démonstration générale.
- On se rappellera que la valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues. On ne peut donc pas écrire en général

$$|f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

Question II

i. La fonction $\mathrm{erf}(x)$ est une primitive de la fonction continue $(2/\sqrt{\pi})\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Sa dérivée est donc simplement la fonction $(2/\sqrt{\pi})\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

ii. Citer les hypothèses générales de la formule de Taylor à l'ordre 3 ne suffit pas pour justifier l'écriture de celle-ci. Il faut aussi justifier que la fonction à laquelle on applique la formule vérifie ces hypothèses. Ici, la définition de la fonction erf comme primitive d'une fonction indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$ garantissait que les hypothèses étaient vérifiées.

iii.
- La formule de Taylor à l'ordre 3 s'écrit

$$\mathrm{erf}(x) = \mathcal{P}_3(x) + \mathcal{R}_3(x)$$

  L'égalité n'est vraie qu'en présence du reste. On ne peut pas écrire que $\mathrm{erf}(x) = \mathcal{P}_3(x)$.
- Le reste s'écrit

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{1}{4!}x^4 f^{(4)}(\xi),\ \xi \in]0,x[\text{ ou }]x,0[$$

  où il est indispensable de préciser l'intervalle auquel le point ξ appartient.
- Le reste s'exprime ici comme un produit de plusieurs facteurs

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\xi(3-2\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2}x^4, \quad \xi \in]0,x[\text{ ou }]x,0[$$

  Afin de majorer ce reste pour $x \in [0, 0.1]$, il faut donner à chacun de ces facteurs sa borne supérieure. En particulier, les facteurs $(3-2\xi^2)$ et $\mathrm{e}^{-\xi^2}$ sont bornés supérieurement par leur valeur pour $\xi = 0$ alors que les bornes supérieures des facteurs ξ et x^4 sont obtenes en remplaçant ξ et x par 0.1.
- Il ne faut pas remplacer des expressions exactes par leur valeur approchée. En particulier, on laissera toujours π, e, $\sqrt{2}$, $1/3$ ... dans les expressions finales sans en donner une valeur numérique approchée.

Question III

i. Rappelons que les points stationnaires d'une fonction sont ceux où la dérivée de cette fonction s'annule.

ii.
- Donner la nature d'un point stationnaire consiste à déterminer s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion à tangente horizontale.
- La nature des points stationnaires de V ne peut être déterminée ici aisément sur base de l'étude de la croissance/décroissance de la fonction au voisinage de ces points stationnaires. Par contre, on peut déterminer la nature d'un point stationnaire $x_\star$ en se basant sur l'ordre et le signe de la première dérivée non nulle en ce point. Rappelons que
  - ◇ la fonction présente un minimum local en $x_\star$ si la première dérivée non nulle en ce point est positive et d'ordre pair ;
  - ◇ la fonction présente un maximum local en $x_\star$ si la première dérivée non nulle en ce point est négative et d'ordre pair ;
  - ◇ la fonction présente un point d'inflexion à tangente horizontale si la première dérivée non nulle en ce point est d'ordre impair.

  L'application de ce critère demande que la fonction V soit suffisamment régulière. Même si cela n'était pas explicitement demandé, il convenait donc de vérifier que la fonction V était suffisamment continûment dérivable pour déterminer la nature des points stationnaires sur base des valeurs de ses dérivées. Étant donné les hypothèses sur f, on pouvait aisément en conclure que $V \in C_\infty(\mathbb{R})$.

  La première dérivée non nulle pour les points x_1 est la dérivée seconde et elle est positive de sorte que ces points sont des minimas de la fonction V. La première dérivée non nulle pour les points x_2 est également la dérivée seconde mais son signe dépend des caractéristiques de la fonction f. Suivant le cas, elle peut être positive et correspondre à des minimas de V ou négative et corrrespondre à des maximas de V.

iii. Les points stationnaires de V tels que $f(x^\star) = 1$ et $f'(x^\star) = 0$ annulent la dérivée seconde de V. Il est donc nécessaire de continuer à dériver la fonction V jusqu'à obtenir une dérivée qui ne s'annule pas en ces points (la dérivée quatrième ici) pour déterminer leur nature.

Le calcul des dérivées successives ne présente pas de complication particulière mais il faut pouvoir organiser ses calculs de façon efficace, écrire soigneusement et ne pas laisser tomber trop rapidement les bras face à des développements de quelques lignes.