Analyse de séries temporelles

Eric J.M. Delhez

October 28, 2010

Concepts de base.

Statistiques descriptives

Valeurs mesurées $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ aux temps (discrets) $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$
Hypothèse : $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ = constante.

- Moyenne

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$$

- Variance

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \mu \right]^2$$

- Ecart-type σ

Autocorrélation

- Auto-corrélation

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} y_i y_{i+k} \qquad \text{où} \qquad \tau = k\Delta t$$

- Auto-covariance

$$C_{yy}(\tau) = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} (y_i-\mu)(y_{i+k}-\mu)$$

$$C_{yy}(0) = \sigma^2 = R_{yy}(0) + \mu^2$$

Auto-covariance normalisée

$$\rho_{yy}(\tau) = \frac{C_{yy}(\tau)}{\sigma^2} \in [-1, 1]$$

- Bruit blanc :

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \sigma_0^2 \rho_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} \sigma_0^2 & \text{pour } \tau = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Signal harmonique $y_i = A \sin \frac{2\pi i \Delta t}{T}$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}, \qquad \rho_{yy}(\tau) = \cos \frac{2\pi\tau}{T}$$

Temps caractéristique intégral

$$T^\star = \frac{\Delta\tau}{2}\sum_{i=0}^{N'}\left[\rho_{yy}(\tau_i)+\rho_{yy}(\tau_{i+1})\right]$$

$$= \frac{\Delta\tau}{2\sigma^2}\sum_{i=0}^{N'}\left[C_{yy}(\tau_i)+C_{yy}(\tau_{i+1})\right]$$

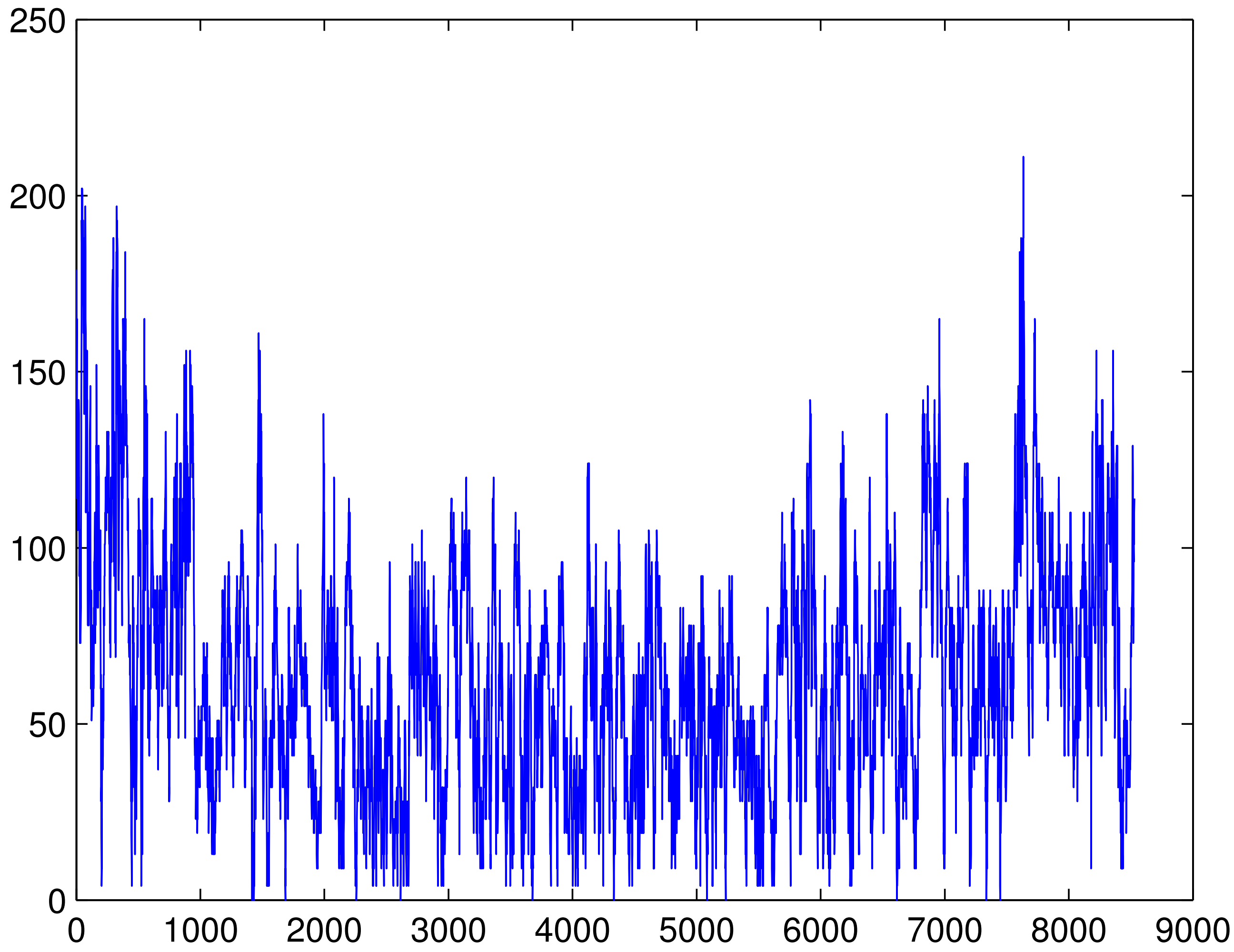
$$\approx \int_0^\infty \rho_{yy}(\tau)d\tau$$

si la somme converge.

Sinon, limiter au premier zéro de ρ.

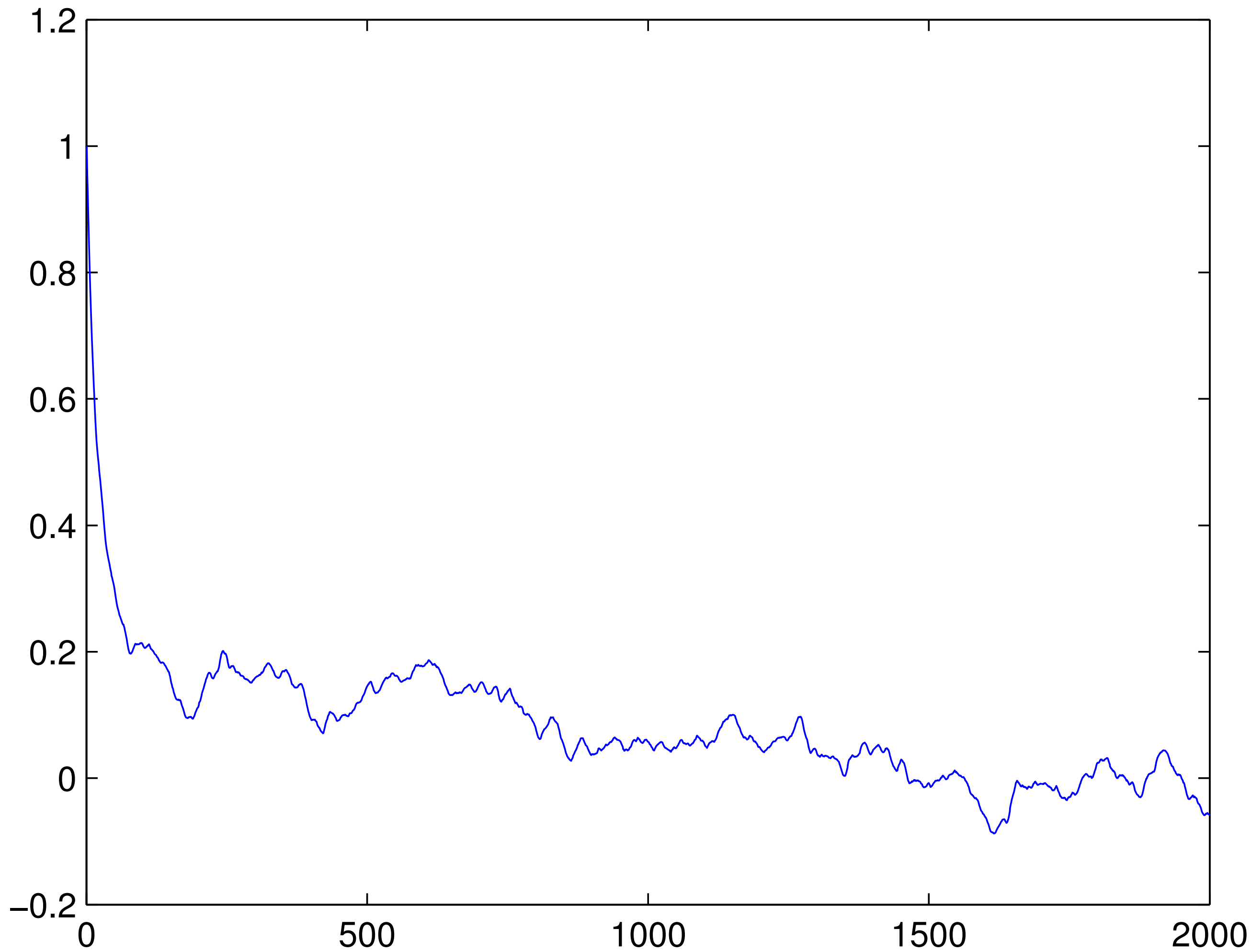
$T^\star$ = Horizon de prévision

Vent mesuré à 10 m



Durée = 1 mois, Δt = 5 minutes

Auto-covariance normalisée



$\Rightarrow \quad T^\star \approx 12$ heures

Série de Fourier

Série de Fourier

Si $f(t)$ est de période T,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right]$$

où a_k, b_k sont les coefficients de Fourier

Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Décomposition en modes indépendants

Fonctions orthogonales

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi \ell t}{T}\right)dt = 0 \qquad \forall k,\ell$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi \ell t}{T}\right)dt = 0 = \begin{cases} 1 & \text{si } k=\ell=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k=\ell>0 \\ 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases}$$

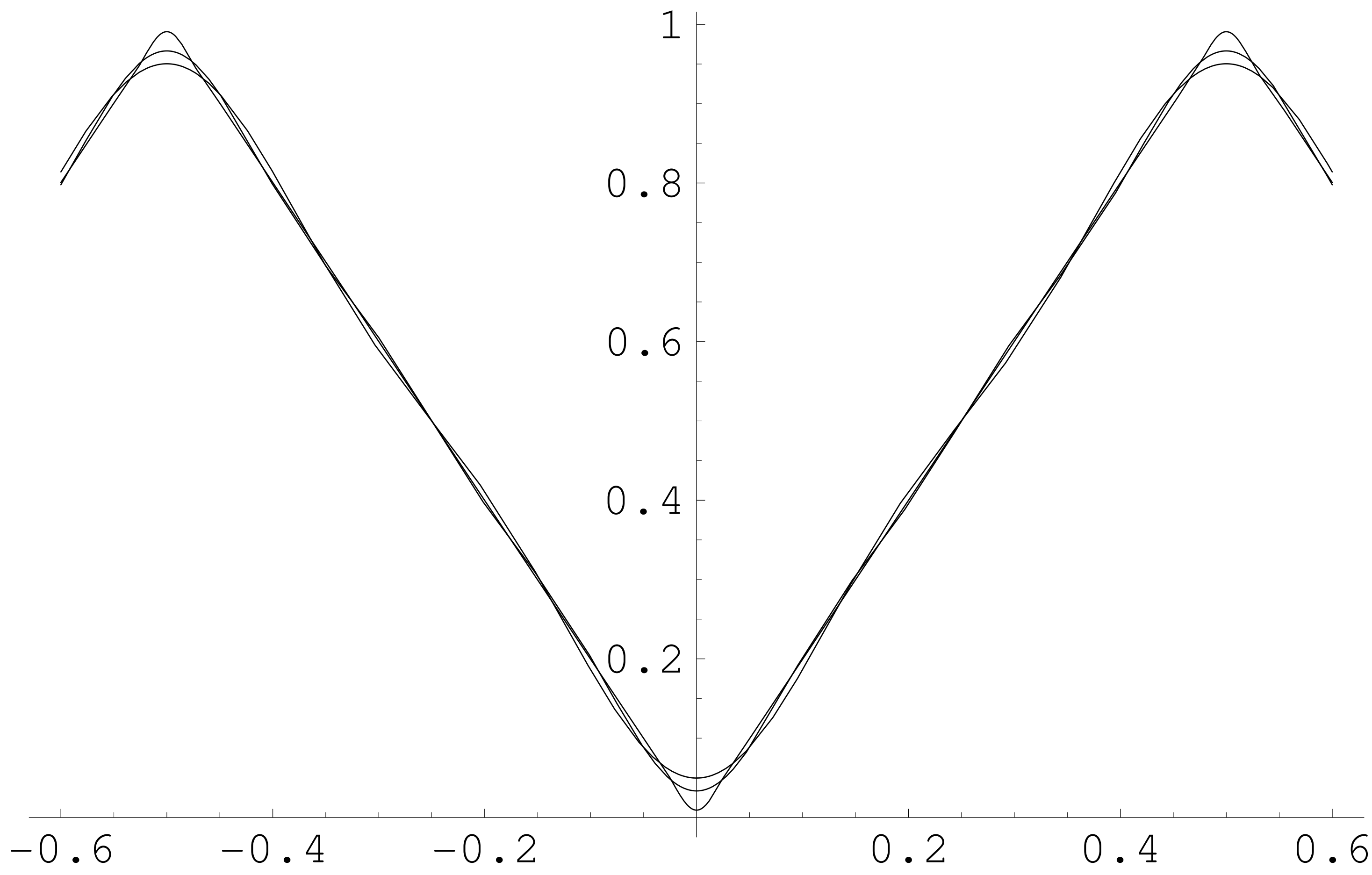
$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi \ell t}{T}\right)dt = 0 = \begin{cases} 0 & \text{si } k=\ell=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k=\ell>0 \\ 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases}$$

Coefficients de Fourier

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi\ell t}{T}\right)dt &= \frac{a_0}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\sin\left(\frac{2\pi\ell t}{T}\right)dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T}\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi\ell t}{T}\right)dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{t_0}^{t_0+T}\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi\ell t}{T}\right)dt \\
&= b_\ell \frac{T}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt \\
b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)dt
\end{cases}
$$

Exemple



$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2k+1)\omega t \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier Transform

Lien avec les séries

Spectre de série de Fourier d'une fonction de période T

$$0, \quad \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi}{T}, \quad \frac{6\pi}{T}, \quad \frac{8\pi}{T}, \quad \ldots$$

Si $T \to \infty$, on obtient la Transformée Inverse de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Semblable à

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right]$$

Rappel :

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$$

Transformée de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Transformée de Fourier :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

semblable à

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\dfrac{2\pi k t}{T}\right) dt \\ b_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\dfrac{2\pi k t}{T}\right) dt \end{cases}$$

Cas réel

Si $f(t)$ est réelle,

$$\tilde{f}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt} = \overline{\tilde{f}(\omega)}$$

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{f}(\omega)}\, e^{-i\omega t} + \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t} &= \overline{\tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}} + \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t} \\ &= 2\Re\left[\tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\right] = 2\Re[\tilde{f}(\omega)] \cos\omega t - 2\Im[\tilde{f}(\omega)] \sin\omega t \\ &= 2|\tilde{f}(\omega)| \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)| \cos(\omega t + \arg\tilde{f}(\omega))\, d\omega$$

Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Les modes de Fourier sont indépendants et leur contributions à l'énergie totale s'additionnent.

DFT

Transformée de Fourier Discrète

Données discrètes $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ aux temps $t_j = t_0 + j\Delta t$

Transformée de Fourier Discrète

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N} kj}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Transformée de Fourier Discrète Inverse

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{N} kj}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1$$

Cas réel

Si x_j sont réels,

$$X_k = \overline{X_{N-k}}$$

et $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{N/2}$ suffisent pour représenter le signal initial :

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[X_0 + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} |X_k| \cos(k\omega_1 t + \arg X_k) + X_{N/2} \cos \frac{N\omega_1 t}{2} \right]$$

- X_0 : moyenne du signal
- X_k : signal de pulsation

$$\omega_k = k\omega_1 \qquad k = 1, 2, \ldots, N/2$$

où

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \text{pulsation fondamentale}$$

Paramètres critiques

Spectre :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N\Delta t}, \qquad \omega_k = k\omega_1 \qquad k = 1, 2, \ldots, N/2$$

- Fréquence de Nyquist : $\omega_{\max} = \dfrac{\pi}{\Delta t}$

  $\Rightarrow$ Si Δt diminue, on décrit de plus hautes fréquences.

- Résolution spectrale : $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{N\Delta t}$

  $\Rightarrow$ Si $N\Delta t$ augmente, la résolution augmente.

Parseval

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}|x_j|^2 = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$$

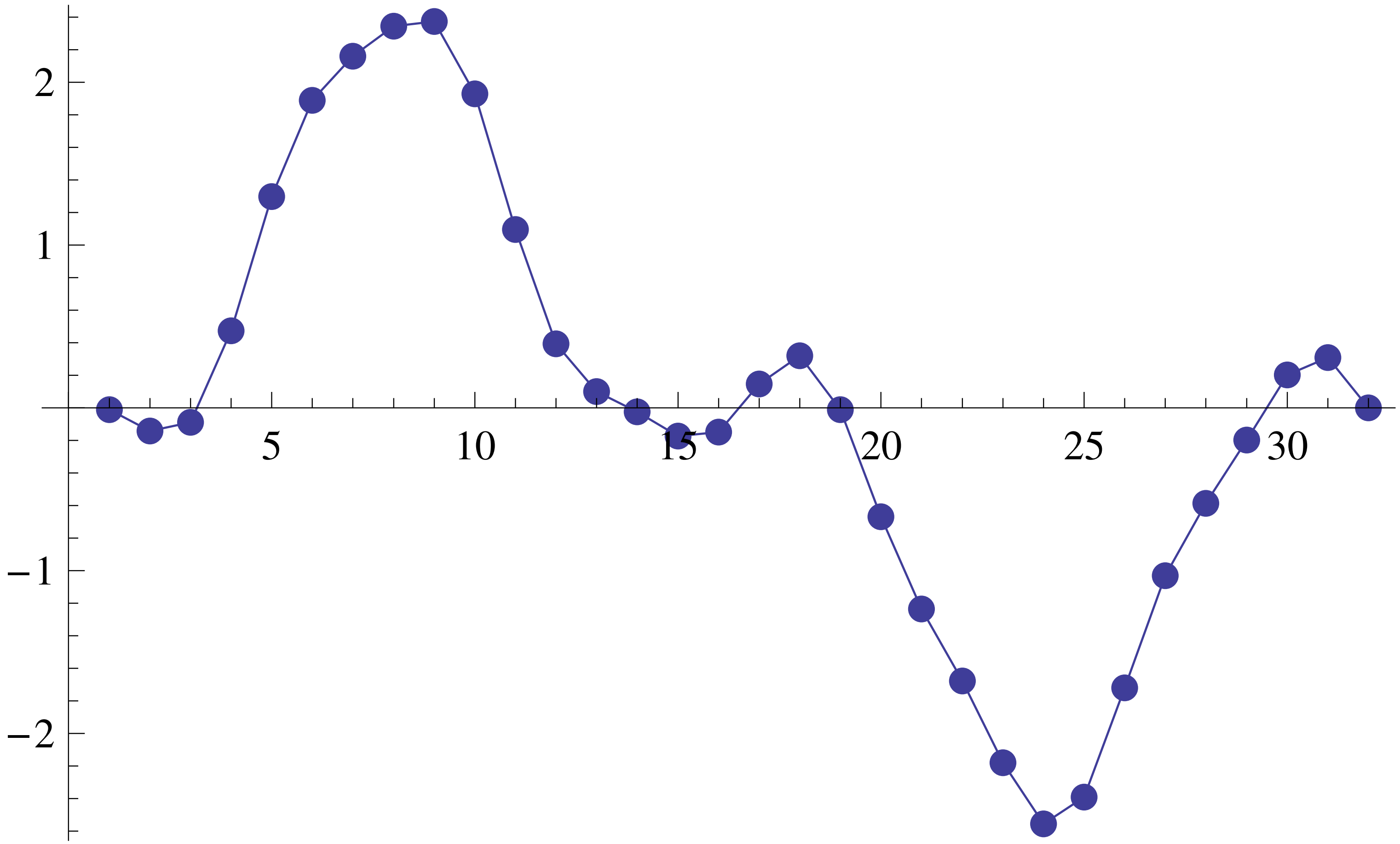
Données réelles décrites par un nombre pair de données,

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}|x_j|^2 = \frac{1}{\sqrt{N}}\left[|X_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}|X_k|^2 + |X_{N/2}|^2\right]$$

Densité spectrale (normalisation par $\Delta\omega$) :

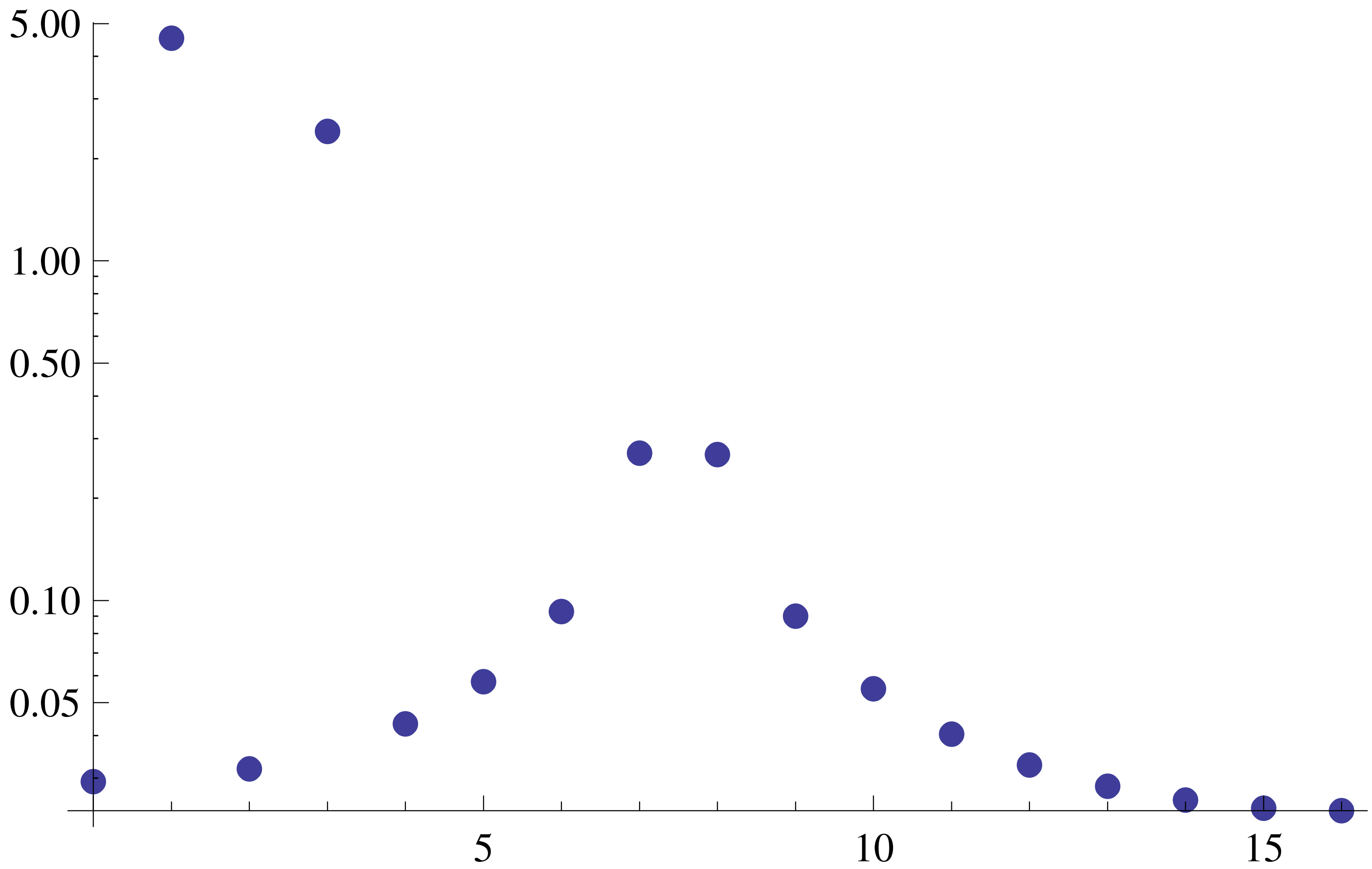
$$S(\omega_k) = \frac{2|X_k|^2}{\Delta\omega}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Exemple



Durée = 12 s, $\Delta t = 0.375s$

Exemple - DFT



$T_1 = T = 12\,s, \quad T_3 = 4\,s, \quad T_7 = 12/7\,s, \quad T_8 = 12/8\,s$

Filtrage

Principes généraux

Pour filtre $f(t)$,

$$f_w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

Exemple : moyenne glissante

$$w(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{si } |\tau| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction de filtrage

$$f_w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

- Respect de la moyenne : $\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)d\tau = 1$
- Respect de la phase : $w(\tau) = w(-\tau)$

Soit $f(t) = A\cos\omega t$,

$$\begin{aligned} f_w(t) &= A\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left[\omega(t-\tau)\right]w(\tau)d\tau \\ &= A\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\cos\omega\tau d\tau + A\sin\omega t\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\sin\omega\tau d\tau \\ &= A\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\cos\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

Réponse fréquentielle

$$\begin{aligned} f_w(t) &= A\cos\omega t \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\cos\omega\tau d\tau \\ &= f(t)h(\omega) \end{aligned}$$

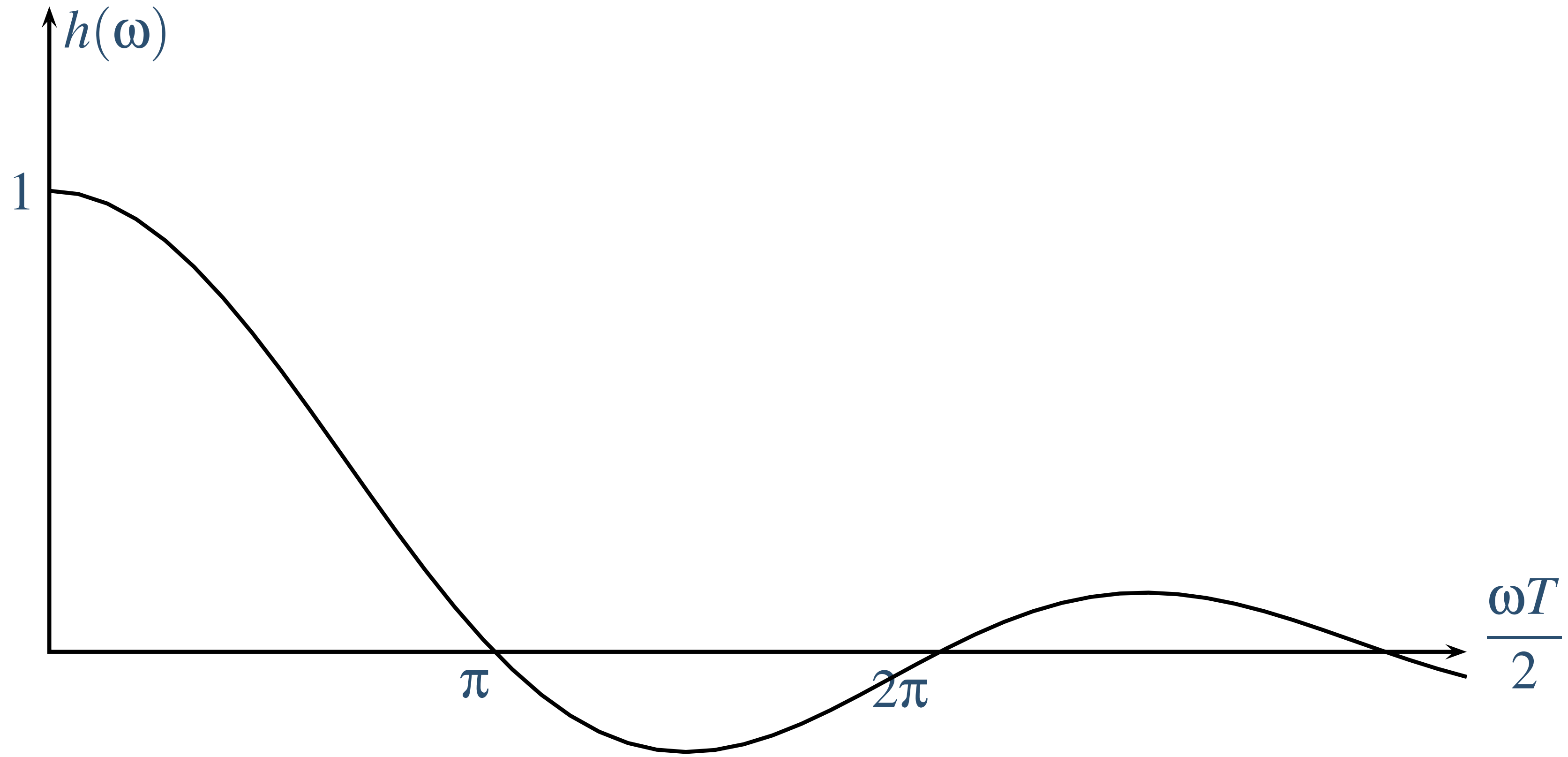
où

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Cas de la moyenne glissante :

$$h(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega\tau d\tau = \frac{2}{\omega T}\sin\frac{\omega T}{2}$$

Moyenne glissante



Gain du filtre constitué par une moyenne glissante de période T.

Cas discret

Données x_j aux temps $t_j = t_0 + j\Delta t$.

$$f_j = \sum_{k=-N}^{N} w_k x_{j+k}$$

où w_k ($k = -N, \ldots, N$) sont les poids du filtre.

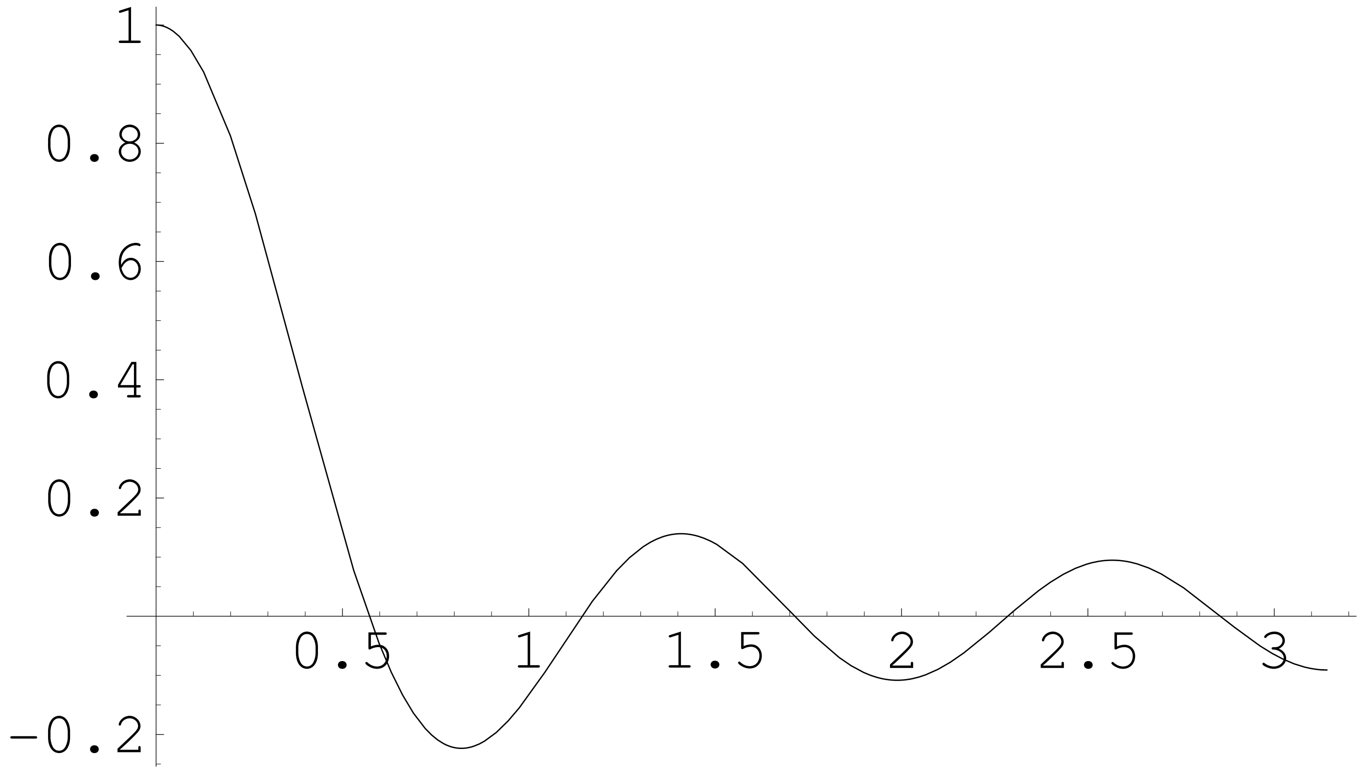
- Respect de la moyenne : $\sum_{k=-N}^{N} w_k = 1$
- Symétrie : $w_{-k} = w_k, \qquad k = 1, \ldots, N$

Réponse fréquentielle :

$$h(\omega) = w_0 + 2\sum_{k=1}^{N} w_k \cos(k\omega\Delta t)$$

Moyenne glissante

$$w_{-N} = w_{-N+1} = \cdots = w_{-1} = w_0 = w_1 = \cdots = w_{N-1} = w_N = \frac{1}{2N+1}$$



Réponse fréquentielle en fonction de $\omega\Delta t$ (Cas particulier $N = 5$).

Filtres bionomial

$$w_k = \frac{1}{2^{2N}} \frac{(2N)!}{(N-k)!(N+k)!}, \qquad k = -N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N$$

- Pour amortir de 50 % les composantes de période T, choisir N comme l'entier le plus proche de $(T/\Delta t)^2/12$
- Supprimer les poids trop petits ($<$ 5 % du max)
- Renormaliser pour que $\sum_k w_k = 1$

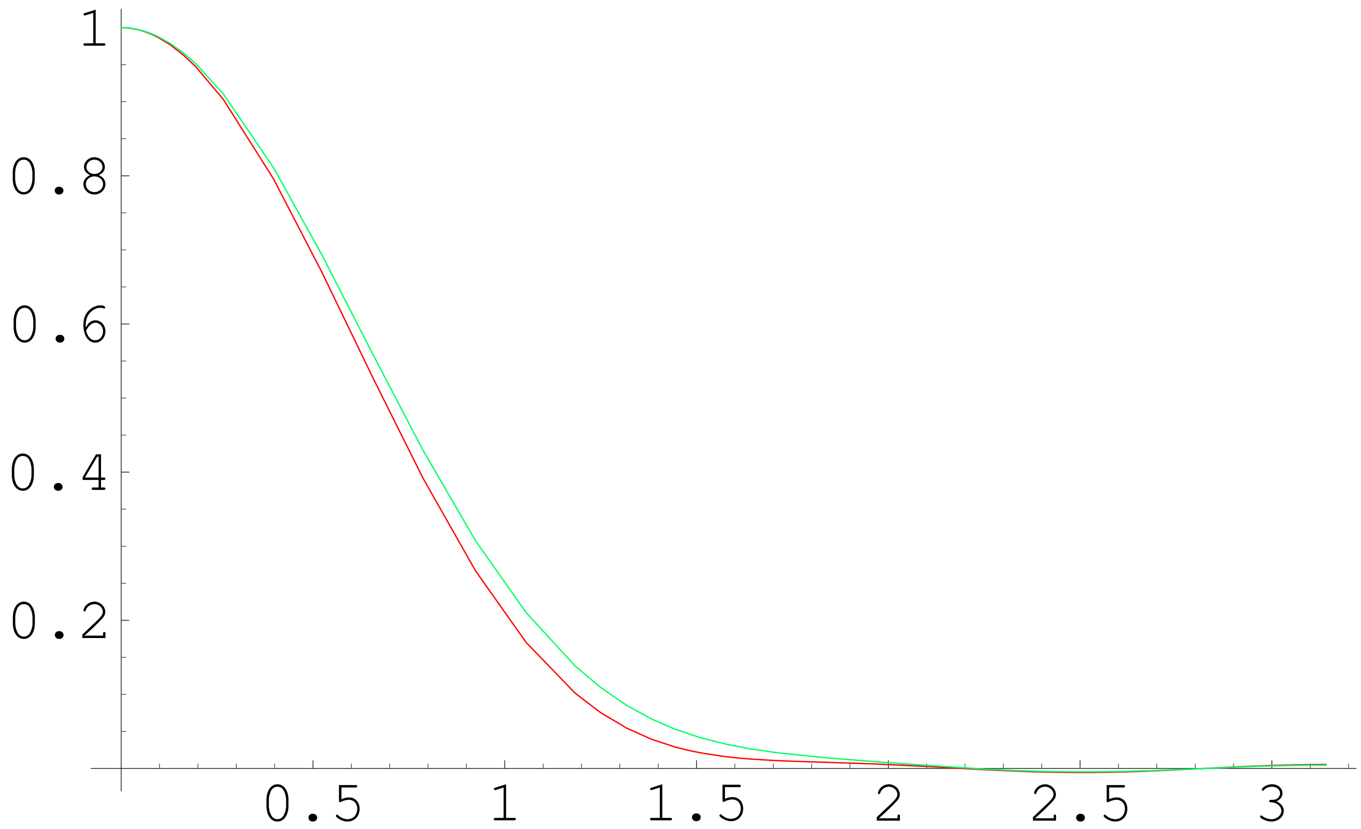
Filtre gaussien

$$w_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{k^2 \Delta t^2}{2\sigma^2}\right] \qquad k = -N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N$$

- Pour amortir de 50 % les composantes de période T, choisir $\sigma = T/6$.
- Supprimer les poids trop petits (< 5 % du max).
- Renormaliser pour que $\sum_k w_k = 1$.

Réponse fréquentielle

Données annuelles, objectif $T = 10$ ans ($\omega\Delta t = 2\pi/10 \approx 0.63$)



Réponse fréquentielle des filtres binomial (en rouge) et gaussien (en vert).

Convolution

$$f_w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) w(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_w(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) w(\tau) d\tau \right\} \mathrm{e}^{-i\omega t} \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \, \mathrm{e}^{-i\omega t} \, dt \right\} w(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Posant $t' = t - \tau$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{f}_w(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \, \mathrm{e}^{-i\omega t'} \, dt' \right\} w(\tau) \, \mathrm{e}^{-i\omega\tau} \, d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \, \mathrm{e}^{-i\omega t'} \, dt' \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \, \mathrm{e}^{-i\omega\tau} \, d\tau \\ &= \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega) \tilde{w}(\omega)\end{aligned}$$

Filtre idéal

$$\tilde{w}_{ideal}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_{ideal}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_{ideal}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \end{aligned}$$

Cas discret :

$$w_{ideal,k} = w_{ideal}(k\Delta t) = \frac{\sin \omega_c k\Delta t}{\pi k\Delta t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fenêtre de Hamming

Pour obtenir un filtre de longueur finie, tronquer progressivement la suite des poids idéaux...

Fenêtre de Hamming (longueur $\ell = 2N+1$)

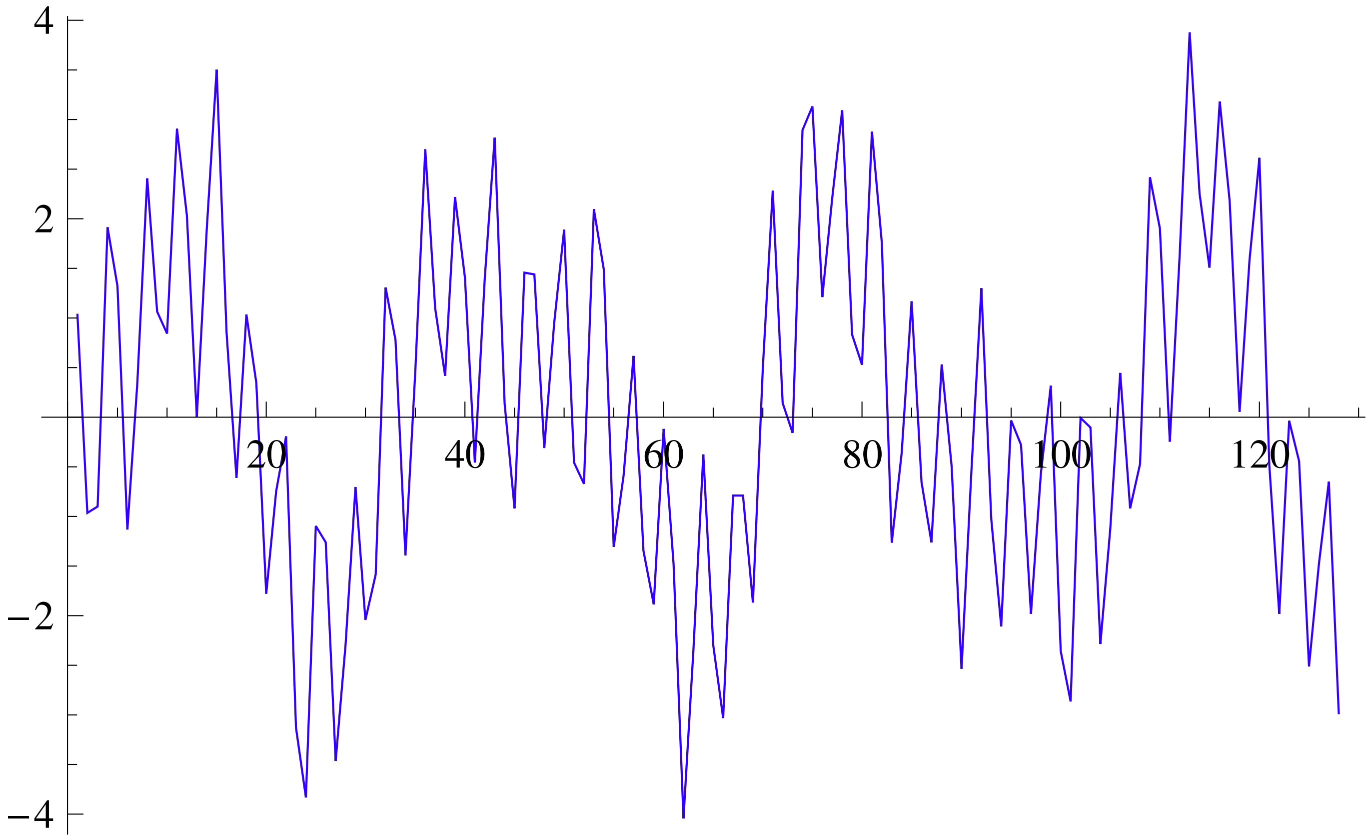
$$h_k = 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi k}{N} \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

$$w_k = w_{ideal,k} \cdot h_k \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$$

+ normalisation.

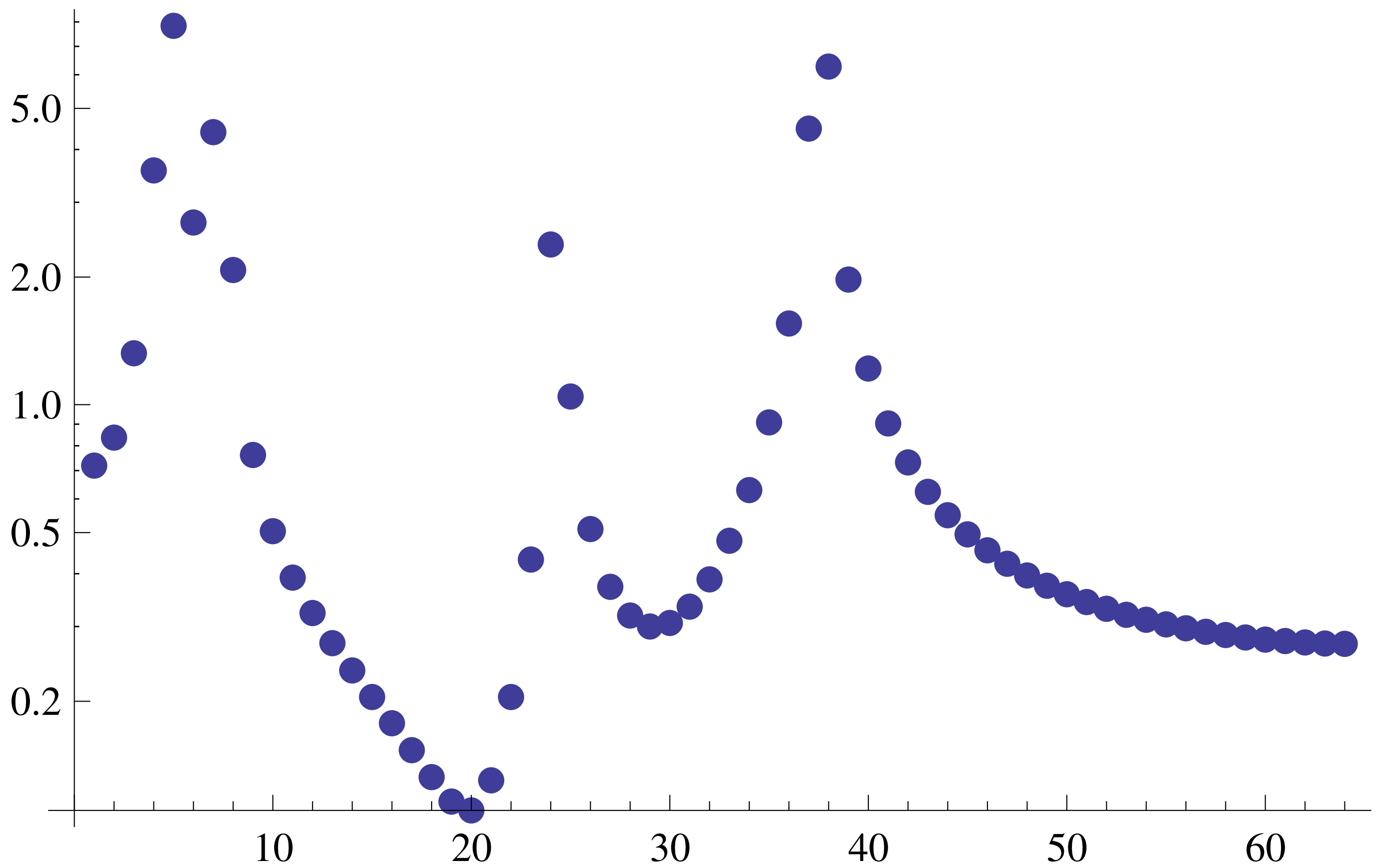
'Meilleur' filtre discret de longueur ℓ

Exemple



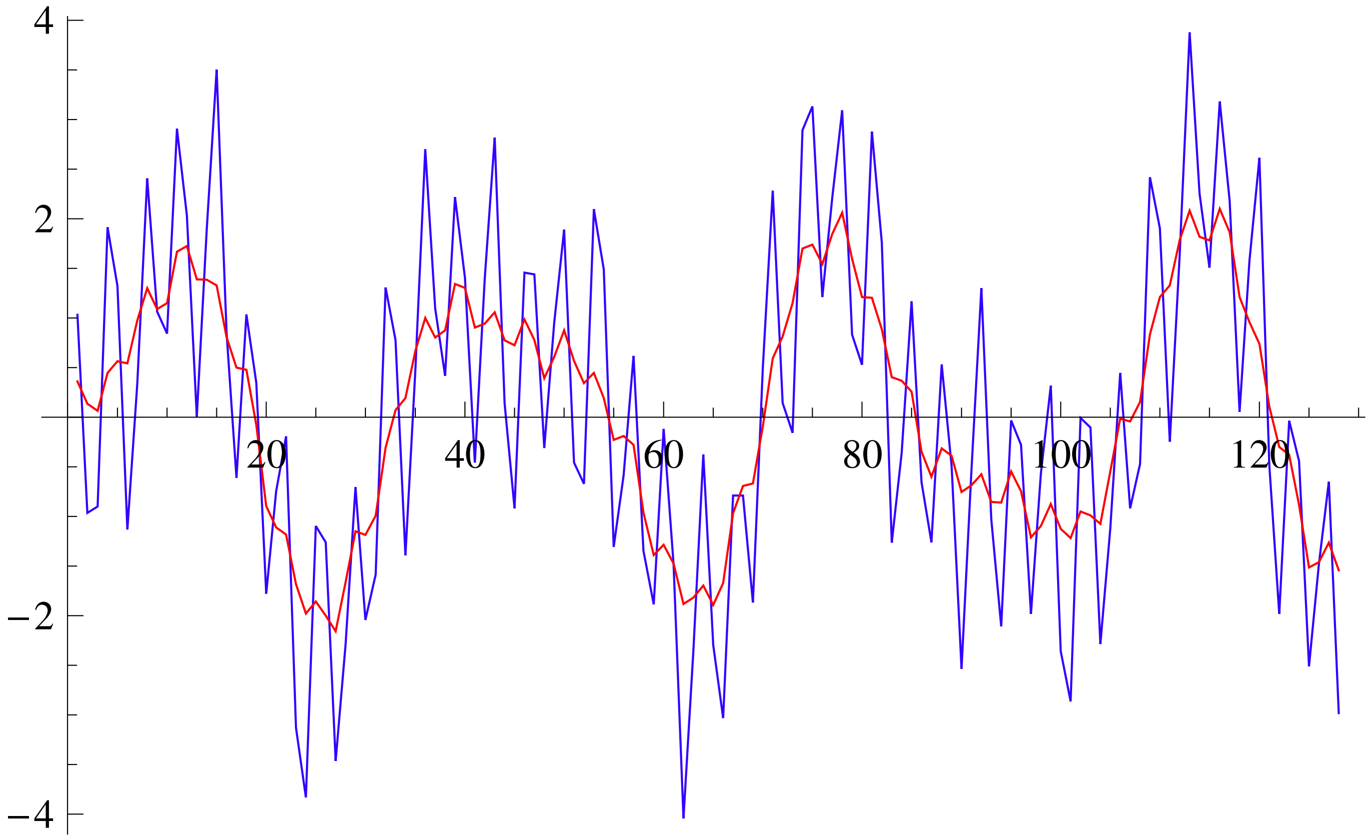
Série de données brutes (longueur = 128)

Exemple (suite)



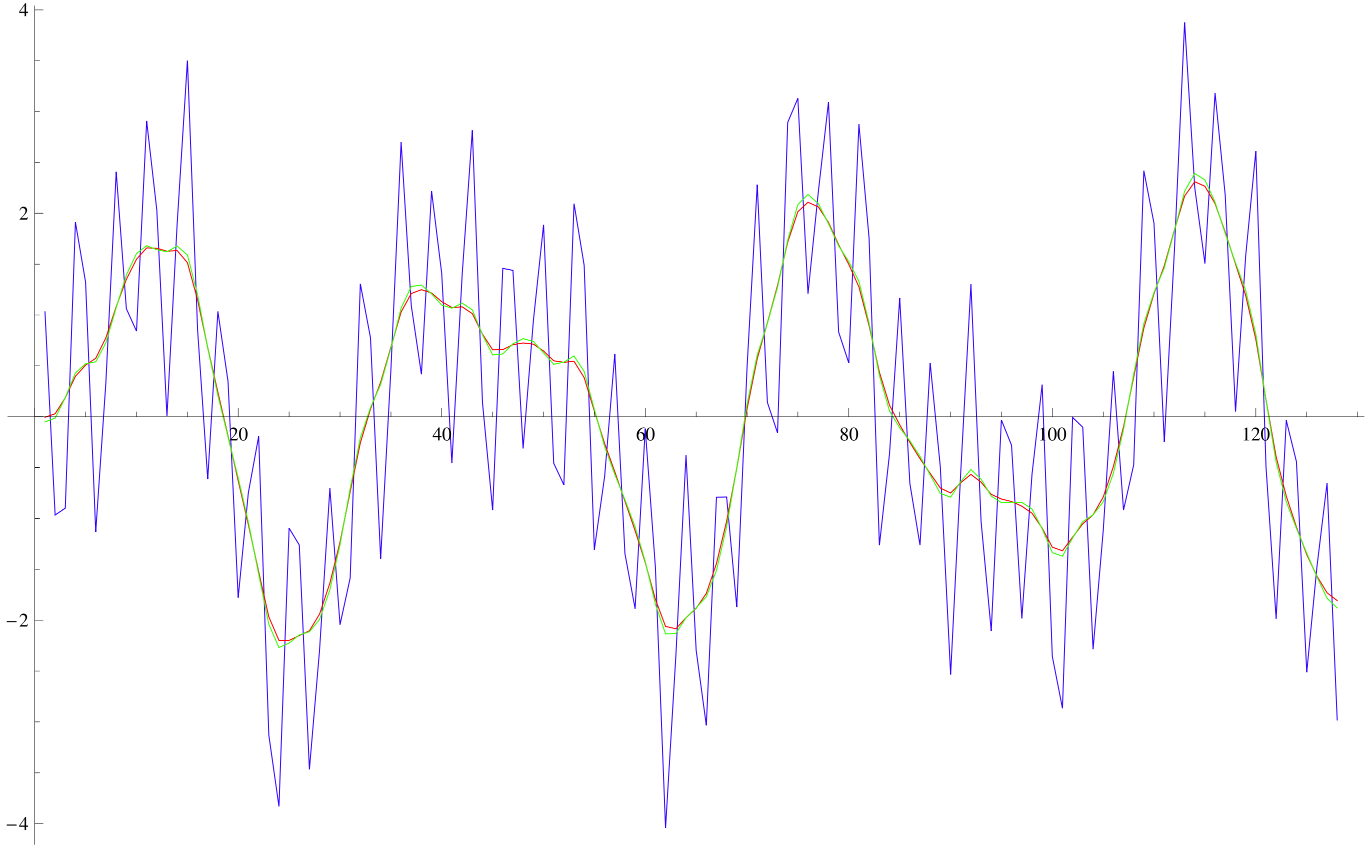
Transformée de Fourier

Exemple (suite)



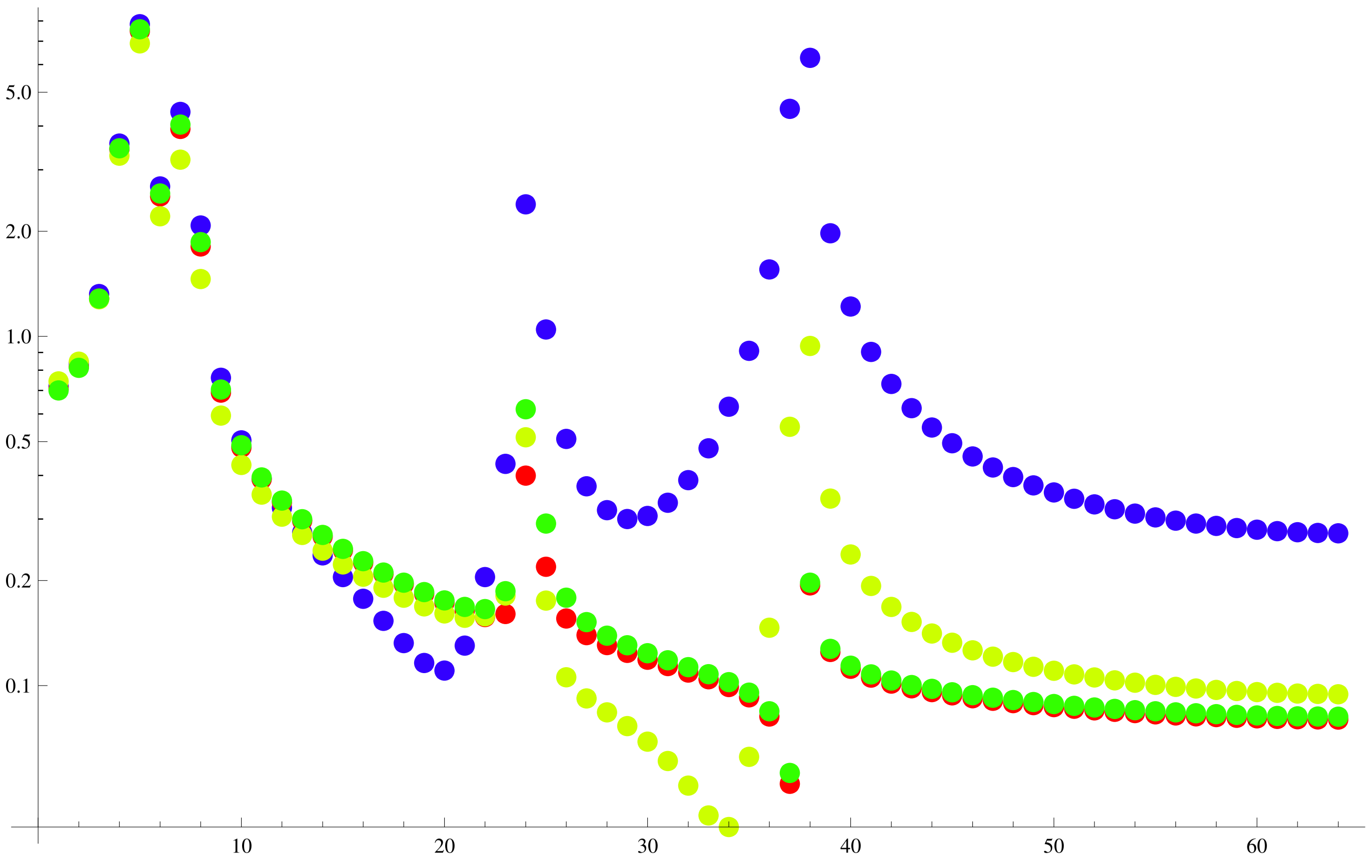
Moyenne glissante ($\ell = 9$)

Exemple (suite)



Filtres gaussien (rouge) et idéal (vert) ($\ell = 9$).

Exemple (suite)



FFT du signal brut (en bleu), de la moyenne glissante (en jaune), du filtre gaussien (en rouge) et du filtre idéal (en vert).

Fin