Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

# OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

JANVIER 2013

*Durée maximale de l'épreuve : 4 heures.*
*Indiquez vos nom et prénom sur chacune de vos feuilles.*
*L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.*

## Question I

*Dans un milieu de profondeur constante $H$, les ondes de gravité de longueur d'onde $\lambda$ se propagent à la vitesse*

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

*où $g$ est l'accélération de la pesanteur.*

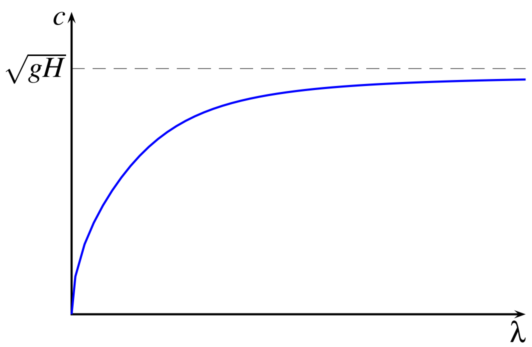
i. *Déterminez le comportement asymptotique de $c$ pour $\lambda/H \to 0$ (ondes courtes).*
Puisque $\operatorname{th} x \sim 1$ pour $x \to +\infty$, il vient

$$c \sim \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad (\lambda/H \to 0)$$

ii. *Déterminez le comportement asymptotique de $c$ pour $\lambda/H \to +\infty$ (ondes longues).*
Puisque $\operatorname{th} 0 = 0$, et $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ avec $\operatorname{ch} 0 = 1$, on a $\operatorname{th} x \sim x$ pour $x \to 0$. Il vient dès lors

$$c \sim \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{2\pi H}{\lambda}} = \sqrt{gH} \qquad (\lambda/H \to +\infty)$$

iii. *Esquissez le graphe présentant les variations de $c$ en fonction de $\lambda (> 0)$.*
La connaissance des comportements asymptotiques déterminés ci-dessus permet d'esquisser le graphe de la façon suivante :




L'absence d'extremum intermédiaire peut être justifiée par le fait que $c'(\lambda) > 0$ à toutes les longueurs d'ondes.

Question II

*On considère le modèle suivant (proposé par Beltrami) pour des populations $x(t)$ et $y(t)$ :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_x x\left(1 - \dfrac{x}{\kappa}\right) - \beta\dfrac{xy}{M+x} \\ \dot{y} = \mu_y y\left(1 - \dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

*où $\mu_x$, $\mu_y$, $\kappa$, $\beta$ et $M$ sont des constantes strictement positives.*

i. *Quel type d'interaction entre les espèces ce modèle décrit-il ? Justifiez en précisant l'interprétation des différents termes.*

Dans la première équation, le terme

$$\mu_x x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)$$

décrit la croissance logistique de la population $x(t)$. En l'absence de l'autre espèce, la croissance est limitée par la capacité portante $\kappa$ du milieu.

Le terme

$$-\beta\frac{xy}{M+x}$$

apparaissant dans la première équation est un terme de perte pour l'espèce $x$ en raison de l'interaction avec la seconde espèce.

Dans la seconde équation, le terme

$$\mu_y y\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

représente la croissance de la population $y(t)$. Ce terme ressemble à une croissance logistique mais dont la capacité portante est la population $x(t)$ de la première espèce qui apparait donc comme une ressource dont dépend la croissance de $y(t)$.

Ces différents éléments permettent d'interpréter le système d'équation comme celui d'une relation de prédation de l'espèce représentée par $y(t)$ sur la population $x(t)$.

ii. *Dans le cas où la population $y(t)$ est nulle à tout instant, déterminez explicitement l'évolution temporelle de la population $x(t)$ à partir d'une population initiale $x_0$.*

Dans ce cas, on doit résoudre

$$\dot{x} = \mu_x x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)$$

Cette équation est à variables séparables. On a

$$\int \frac{dx}{x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)} = \int \mu_x \, dt + C$$

La primitive apparaissant dans le membre de gauche peut être évaluée de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)} &= \int \left[\frac{1 - \frac{x}{\kappa}}{x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)} + \frac{\frac{x}{\kappa}}{x\left(1 - \frac{x}{\kappa}\right)}\right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\kappa - x} \\ &= \ln x - \ln|\kappa - x| = \ln\left|\frac{x}{\kappa - x}\right| \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, il vient dès lors

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{-\mu_x t} + (1 - e^{-\mu_x t})x_0/\kappa}$$

où on a noté $x(0) = x_0$.

iii. *Sachant que* $[x] = ML^{-2}$, *déterminez les dimensions de* $y$, $\mu_x$, $\mu_y$, $\kappa$, $\beta$ *et* $M$.

De la deuxième équation, on déduit que

$$[y/x] = [1] = 1 \qquad \Rightarrow \qquad [y] = [x] = ML^{-2}$$

Ensuite, on remarque que

$$[\dot{x}] = [\mu_x x] \qquad \Rightarrow \qquad [\mu_x] = \frac{[\dot{x}]}{[x]} = \frac{[x]/T}{[x]} = T^{-1}$$

En procédant de même dans la seconde équation, on trouve $[\mu_y] = T^{-1}$.
De la première équation, on tire également

$$[\kappa] = [x] = ML^{-2} \qquad \text{et} \qquad [M] = [x] = ML^{-2}$$

Enfin, il vient

$$[\beta] = \frac{[\dot{x}][M+x]}{[xy]} = \frac{[x]/T\,[x]}{[x][y]} = T^{-1}$$

*Dans la suite de l'étude, on considère les valeurs numériques*

$$\mu_x = \frac{2}{3}, \qquad \kappa = 4, \qquad \beta = 1, \qquad M = 1$$

*Dans ce cas,*

iv. *Déterminez les différentes configurations d'équilibre de ce système.*

Les configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2x}{3}\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) - \dfrac{xy}{1+x} \\ 0 = \mu_y y \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

De la seconde de ces équations, on tire deux familles de solutions correspondant à $y = 0$ et à $x = y$.

- Si $y = 0$, la première équation devient

$$0 = \frac{2x}{3}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

  dont les solutions sont $x = 0$ et $x = 4$.
  On en déduit donc l'existence des configurations d'équilibre $(x, y) = (0, 0)$ et $(x, y) = (4, 0)$.

- Si $y = x$, la première équation devient

$$0 = \frac{2x}{3}\left(1 - \frac{x}{4}\right) - \frac{x^2}{1+x}$$

  Écartant la solution $x = 0$ qui conduirait à la configuration $(x, y) = (0, 0)$ déjà identifiée plus haut, il vient

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

  dont les solutions sont

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

  La seule solution configuration d'équilibre acceptable est donc $(x, y) = (1, 1)$.

v. *Étudiez la stabilité de la seule configuration d'équilibre permettant la cohabitation des deux populations en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\mu_y$.*

La stabilité de la configuration d'équilibre $(x,y) = (1,1)$ peut être étudiée en calculant les valeurs propres de la matrice de communauté

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2x}{3}\left(1-\dfrac{x}{4}\right) - \dfrac{xy}{1+x} \\ g(x,y) = \mu_y y \left(1-\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{(1+x)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{1+x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = \mu_y \dfrac{y^2}{x^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \mu_y - 2\mu_y \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 \\ \mu_y & -\mu_y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathsf{A}$ sont les solutions de

$$0 = \det(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1/12 - \lambda & -1/2 \\ \mu_y & -\mu_y - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\mu_y - \frac{1}{12}\right)\lambda + \frac{5}{12}\mu_y$$

Notant $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $\mathsf{A}$, on a

$$\lambda^2 + \left(\mu_y - \frac{1}{12}\right)\lambda + \frac{5}{12}\mu_y = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

de sorte que

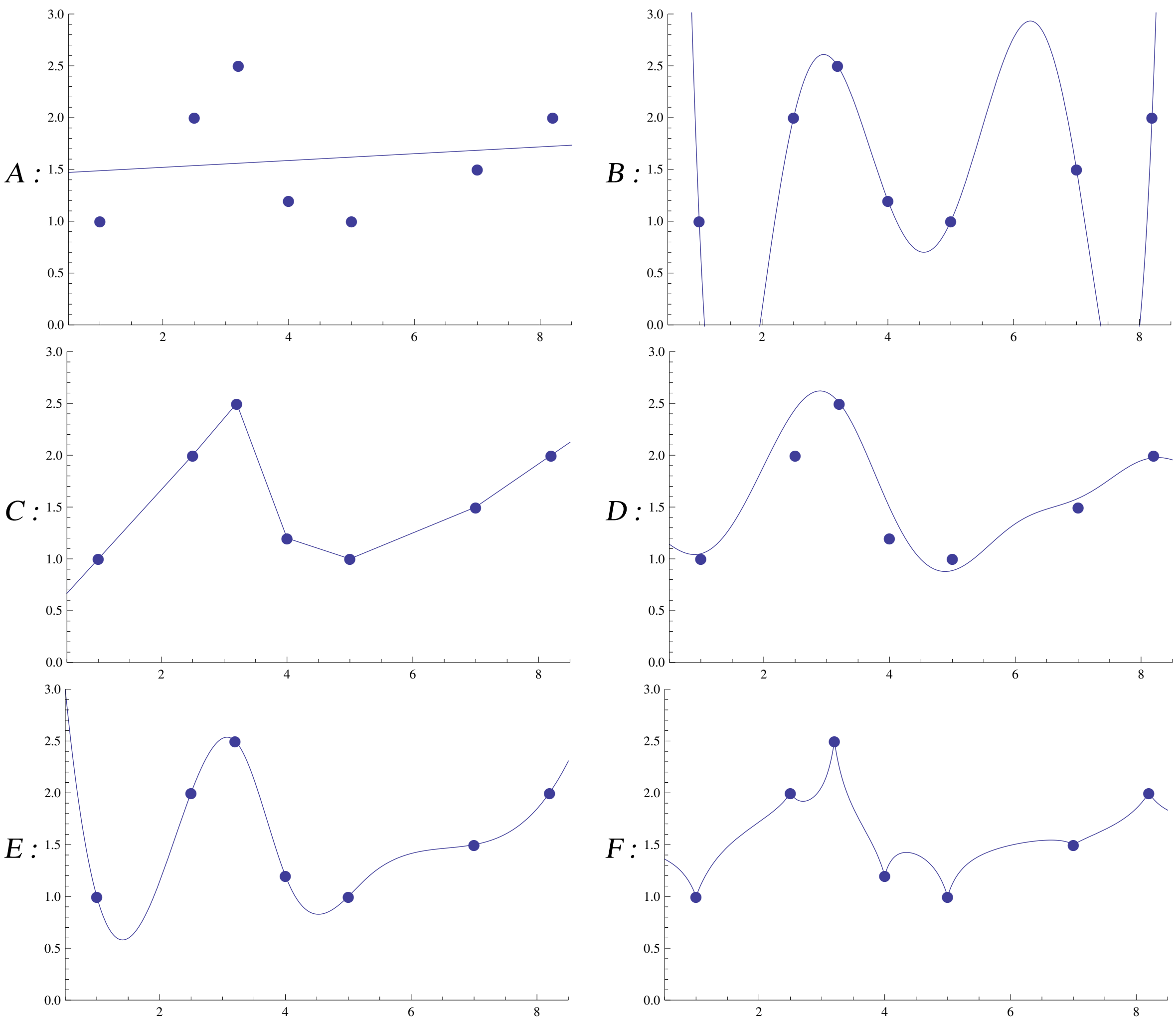
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{1}{12} - \mu_y \\ \lambda_1 \lambda_2 = \dfrac{5}{12} \end{cases}$$

La seconde relation montre que les deux valeurs propres sont soit toutes les deux du même signe, soit complexes conjuguées l'une de l'autre.

- Si $\mu_y < 1/12$, la première relation montre que les deux zéros sont positifs ou sont complexes avec une partie réelle positive ; l'équilibre est donc instable.
- Si $\mu_y > 1/12$, les deux zéros sont négatifs ou sont complexes avec une partie réelle négative ; l'équilibre est donc stable.
- Si $\mu_y = 1/12$, les zéros sont $\pm\sqrt{5/12}\, i$ ; l'équilibre est marginalement stable.

Question III

*On dispose de quelques mesures ponctuelles de la concentration en $CO_2$ permettant de décrire l'évolution temporelle de celle-ci sur une période de 7 jours. Souhaitant utiliser ces données dans un modèle numérique, on utilise différentes méthodes pour obtenir une valeur de la concentration à chaque pas de temps. Les différentes évolutions temporelles de la concentration ainsi recréées sont représentées ci-dessous.*




i. *Déterminez la méthode utilisée pour obtenir chacun des graphiques. Précisez les raisons qui vous font associer le graphique à cette méthode.*

ii. *Expliquez brièvement (quatre lignes maximum par méthode) le principe de chaque méthode. Donnez ce qui apparaît pour vous comme les avantages et inconvénients de celle-ci dans le contexte envisagé ici.*

A. Régression linéaire : une droite est ajustée aux données en minimisant la somme des carrés des erreurs associées à cette approximation. Les données sont supposées imparfaites.
La méthode ne permet pas de bien représenter l'évolution précise du signal au cours du temps (-). L'évolution est progressive mais seule l'évolution générale peut, dans les cas favorables, être décrite de cette façon (-).

B. Polynôme de Lagrange : un polynôme de degré élevé (6° ordre ici) est ajusté en imposant qu'il passe exactement par chacun des points de mesure.
L'interpolation par un polynôme d'ordre élevé donne lieu à des oscillations de grande amplitude qui ne sont pas physiques (-). Les valeurs estimées sortent notoirement du domaine des valeurs initiales (-).

C. Interpolation linéaire par morceau : une interpolation linéaire est réalisée entre chacun des points de mesure.

L'interpolation passe exactement par les points de support. La variable interpolée prend ses valeurs dans le domaine défini par les données mesurées (+). La pente varie de façon discontinue (-).

D. Analyse objective (interpolation optimale) : l'interpolant est défini en admettant que les valeurs mesurées sont imparfaites et en tenant compte de la cohérence spatiale attendue du champ.

La représentation est optimale au sens où elle minimise une certaine mesure de la variabilité (+). Elle est lisse et épouse les grandes tendances présentes par les données sans être exagérément influencée par les points de mesure individuels (+).

E. Interpolation spline : une interpolation polynômiale cubique est utilisée entre chaque paire de points en demandant à l'interpolant de passer exactement par les points et d'être deux fois continûment dérivable.

L'interpolation semble naturelle (+). Les variations, y compris celles de la dérivée première, sont progressives (+). Chaque mesure, même erronée, possède une influence locale importante sur l'interpolation (-).

F. Interpolation par distance inverse : la valeur en un point est calculée par une moyenne pondérée de toutes les valeurs observées avec des poids inversement proportionnels à la distance entre le point et la valeur observées considérés.

L'interpolant est continu (+) mais sa dérivée première ne l'est pas (-). L'évolution est peu naturelle (-), surtout au voisinage de chacun des points de mesure, car la valeur en un point est influencée non seulement par les mesures voisines mais par toutes les valeurs mesurées. L'estimation des dérivées est de très mauvaise qualité (-).

## Question IV

*Définissez brièvement (10 lignes maximum par concept) les concepts suivants et précisez leur utilité éventuelle :*

i. *dérivée matérielle ;*

Dans un fluide en mouvement, la dérivée matérielle permet de calculer le taux de variation temporelle des propriétés des particules fluides en suivant celles-ci au cours de leur mouvement. Si on note $(u, v, w)$ les trois composantes de la vitesse, on a

$$D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

ii. *transformée de Fourier discrète ;*

La transformée de Fourier discrète d'une série temporelle discrète permet de représenter l'enregistrement comme la superposition de modes harmoniques en mettant en évidence les fréquences caractéristiques des phénomènes sous-jacents. La résolution spectrale $\Delta\omega = 2\pi/T$, *i.e.* la plus petite différence de fréquence entre les signaux pouvant être identifiés séparément, dépend de la longueur totale $T$ de la série temporelle. Le pas de temps $\Delta t$ détermine la fréquence la plus élevée $(2\Delta t)^{-1}$ décrite par l'échantillonnage.

iii. *moyenne glissante ;*

La moyenne glissante d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$< f >= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau)d\tau$$

Les phénomènes dont les temps caractéristiques sont inférieurs à $T$ sont lissés par l'opérateur alors que ceux dont le temps caractéristique est supérieur à $T$ ne sont pas (peu) affectés. La moyenne glissante permet donc de filtrer un signal pour en retenir les composantes variant le plus lentement (filtre passe-bas). La procédure peut être aisément mise en œuvre mais n'est pas exempte de limitations, comme le fait que l'amortissement des composantes ne dépend pas monotonement de la fréquence.

iv. *filtre binomial ;*

Le filtre binomial permet de lisser une série temporelle discrète en retenant les composantes aux basses fréquences. Les valeurs lissées sont obtenues comme des moyennes pondérées des données brutes dont les poids sont ajustés proportionnellement à ceux d'une distribution statistique binomiale. Pour améliorer le filtrage, on peut combiner le filtre binomial avec une fenêtre de Hamming.

v. *divergence d'un champ vectoriel.*

Le divergence d'un champ vectoriel **f** est donnée par

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

La divergence mesure la tendance du champ vectoriel à diverger. Cette divergence est généralement associée à une source ou à un puits. À l'inverse, l'annulation de la divergence du champ de vitesse $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ d'un fluide incompressible (équation de continuité) exprime le fait que le flux d'eau entrant dans tout volume arbitraire $V$ est égal au flux sortant, l'eau ne pouvant s'accumuler en raison de son incompressibilité.