Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

JANVIER 2012

Durée maximale de l'épreuve : 4 heures.
Indiquez vos nom et prénom sur chacune de vos feuilles.
L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.

Question I

Soit un thermistor dont la résistance électrique varie en fonction de la température selon

$$R(T) = R_0 \exp\left[\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

où R_0, β et T_0 sont des constantes strictement positives. Linéarisez cette expression au voisinage de T_0.

La linéarisation consiste à approcher le graphe de la fonction $R(T)$ par sa tangente en $T = T_0$, *i.e.*

$$R(T) \approx R(T_0) + R'(T_0)(T - T_0)$$

On calcule aisément

$$R(T_0) = R_0, \qquad R'(T) = R_0 \exp\left[\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]\left(-\frac{\beta}{T^2}\right), \qquad R'(T_0) = -\frac{\beta R_0}{T_0^2}$$

de sorte que

$$R(T) \approx R_0\left[1 - \frac{\beta}{T_0^2}(T - T_0)\right]$$

Question II

Un chémostat est un dispositif de laboratoire permettant de cultiver des organismes dans un système ouvert dont on contrôle les paramètres par l'apport d'un débit constant Q d'une solution contenant une concentration de nutriments N_0. Pour garder un volume V constant dans le chémostat, on évacue à chaque instant un débit Q égal au débit entrant. On note respectivement par $B(t)$ et $N(t)$ les concentrations des bactéries et des nutriments à l'instant t. Le chémostat peut alors être représenté par le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = \mu \dfrac{N}{N+\kappa} B - \dfrac{Q}{V} B \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{Q}{V}(N_0 - N) - \mu \dfrac{N}{N+\kappa} B \end{cases}$$

où N_0, μ, κ, Q et V sont des constantes strictement positives.

i. *Donnez une interprétation des différents termes des équations du système.*

- Le terme
$$\mu\frac{N}{N+\kappa}B$$
décrit la croissance des bactéries, dont le taux est limité par la quantité de nutriments par le biais d'une fonction de Michaelis-Menten-Monod. Il apparaît donc en positif dans l'équation pour la concentration des bactéries et affecté d'un signe négatif dans celle pour les nutriments.
- Les termes
$$-\frac{Q}{V}B \qquad \text{et} \qquad -\frac{Q}{V}N$$
indiquent des pertes de bactéries et de nutriments pour le chémostat liées au débit Q sortant du chémostat.
- Le terme
$$\frac{Q}{V}N_0$$
représente une source de nutriments liées à l'apport d'un débit Q d'une solution comportant une concentration N_0 de nutriments.

ii. *Déterminez les dimensions des constantes μ, κ, Q et V. Montrez que l'on peut définir deux temps τ_1 et τ_2 caractérisant la dynamique de ce système.*

L'égalité
$$\left[\frac{dB}{dt}\right]=\left[\mu\frac{N}{N+\kappa}B\right]$$
peut s'écrire
$$\frac{[B]}{T}=[\mu]\frac{[N]}{[N+\kappa]}[B]=[\mu][B]$$
dont on tire
$$[\mu]=\frac{1}{T}$$
Pour que la somme $N+\kappa$ ait un sens, on doit aussi avoir
$$[\kappa]=[N]=\frac{N}{L^3}$$
en supposant que N (et B) représentent des concentrations molaires.

Les dimensions du débit Q et du volume V sont naturellement données par
$$[Q]=\frac{L^3}{T}, \qquad [V]=L^3$$
On vérifie que ceci conduit bien à l'égalité
$$\left[\frac{dB}{dt}\right]=\left[\frac{Q}{V}B\right]=\frac{[B]}{T}$$
En examinant les différents paramètres du problème, on peut donc identifier les temps caractéristiques
$$\tau_1=\frac{1}{\mu} \qquad \text{et} \qquad \tau_2=\frac{V}{Q}$$
qui sont associés respectivement à la croissance des bactéries et au taux de renouvellement du contenu du chémostat.

iii. *Déterminez les configurations d'équilibre du système (en utilisant les variables dimensionnelles initiales) et étudiez leur stabilité.*

Les configurations d'équilibre sont les solutions de
$$\begin{cases} 0=\mu\dfrac{N^\star}{N^\star+\kappa}B^\star-\dfrac{Q}{V}B^\star \\[2ex] 0=\dfrac{Q}{V}(N_0-N^\star)-\mu\dfrac{N^\star}{N^\star+\kappa}B^\star \end{cases}$$

soit

$$(B_1^\star, N_1^\star) = (0, N_0) \qquad \text{et} \qquad (B_2^\star, N_2^\star) = \left(N_0 - \frac{Q\kappa}{\mu V - Q}, \frac{Q\kappa}{\mu V - Q}, \right)$$

La seconde configuration d'équilibre n'a de sens que si $B_2^\star > 0$ et $N_2^\star > 0$ soit si

$$Q < \mu V \qquad \text{et} \qquad N_0 < \frac{Q\kappa}{\mu V - Q}$$

La seconde condition peut être exprimée sous la forme

$$\mu > \frac{Q}{V}\frac{N_0 + \kappa}{N_0} \tag{$\spadesuit$}$$

qui est plus restrictive que la première condition et constitue donc l'unique condition d'existence de la seconde configuration d'équilibre.

Pour examiner la stabilité des configurations d'équilibre, formons la matrice de communauté

$$\mathsf{A}(B,N) = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{N}{\kappa + N} - \dfrac{Q}{V} & \dfrac{B\kappa\mu}{(N+\kappa)^2} \\ -\mu\dfrac{N}{\kappa + N} & -\dfrac{Q}{V} - \dfrac{B\kappa\mu}{(N+\kappa)^2} \end{pmatrix}$$

Pour examiner la stabilité de la première configuration d'équilibre, on calcule

$$\mathsf{A}(B_1^\star, N_1^\star) = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{N_0}{\kappa + N_0} - \dfrac{Q}{V} & 0 \\ -\mu\dfrac{N_0}{\kappa + N_0} & -\dfrac{Q}{V} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$$\mu\frac{N_0}{\kappa + N_0} - \frac{Q}{V} \qquad \text{et} \qquad -\frac{Q}{V}$$

Ces deux valeurs propres sont négatives et l'équilibre est stable si

$$\mu < \frac{Q}{V}\frac{N_0 + \kappa}{N_0}$$

Si, par contre,

$$\mu > \frac{Q}{V}\frac{N_0 + \kappa}{N_0}$$

(ce qui correspond à condition d'existence de la seconde configuration d'équilibre) le taux de croissance des bactéries pour une concentration de nutriments N_0 est supérieur au taux de renouvellement imposé par le flux Q, les bactéries peuvent croître et la première configuration d'équilibre est instable.

En la seconde configuration d'équilibre, on a

$$\mathsf{A}(B_2^\star, N_2^\star) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(Q - V\mu)(Q(N_0 + \kappa) - N_0 V\mu)}{V^2\kappa\mu} \\ -\dfrac{Q}{V} & -\dfrac{\kappa Q^2 + N_0(Q - V\mu)^2}{V^2\kappa\mu} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par

$$0 = \mathrm{dtm}\left(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{I}\right) = \frac{(Q + \lambda V)\left[N_0(Q - \mu V)^2 + \kappa\left(Q^2 - \mu Q V + \lambda\mu V^2\right)\right]}{\kappa\mu V^3}$$

soit

$$\lambda_1 = -\frac{Q}{V}, \qquad \lambda_2 = -\frac{(\mu V - Q)(\mu N_0 V - Q(\kappa + N_0))}{\kappa\mu V^2}$$

Sous les conditions d'existence ($\spadesuit$) de la deuxième configuration d'équilibre, les deux valeurs propres sont négatives et l'équilibre est stable.

iv. *Déterminez la condition sur les paramètres du système pour que la culture des bactéries puisse se maintenir. Interprétez cette condition en fonction des temps caractéristiques τ_1 et τ_2 identifiés au point ii.*

De l'analyse précédente, il ressort que la culture des bactéries se maintient lorsque la deuxième configuration d'équilibre existe, *i.e.* lorsque la condition (♠) est rencontrée. En introduisant les temps caractéristiques définis au point ii., cette condition peut être écrite sous la forme

$$\tau_2 > \tau_1 \frac{N_0+\kappa}{N_0}$$

À la croissance des bactéries, on peut associer un temps caractéristique alternatif

$$\tau_1' = \frac{1}{\mu \dfrac{N_0}{\kappa+N_0}}$$

qui correspond au taux de croissance réel pour la concentration de nutriments N_0 du flux entrant. La condition d'existence de la configuration stable devient alors

$$\tau_2 > \tau_1'$$

La croissance des bactéries doit être plus rapide que le renouvellement de la solution dans le chémostat.

v. *Esquissez les trajectoires dans le plan de phase dans le cas où la condition du point précédent est remplie.*

Pour esquisser le plan de phase, on identifie d'abord les isoclines

$$B = 0, \quad \text{et} \qquad N = \frac{Q\kappa}{\mu V - Q}$$

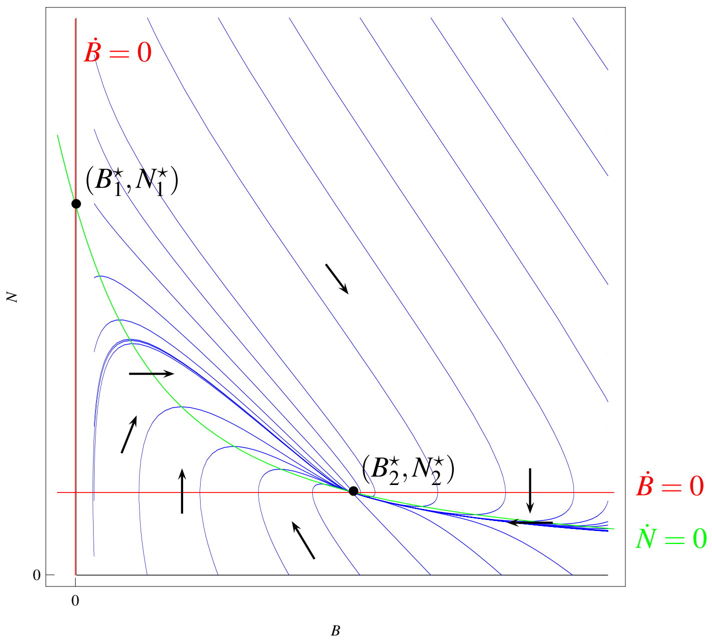
correspondant à l'annulation de $\dot{B}$, représentées en rouge ci-dessous, et

$$B = 0, \quad \text{et} \qquad B = \frac{Q}{\mu V}\frac{(N_0-N)(N+\kappa)}{N}$$

correspondant à l'annulation de $\dot{N}$, représentée en vert ci-dessous.

Les deux intersections de la courbe verte avec les courbes rouges correspondent aux positions d'équilibre du système.

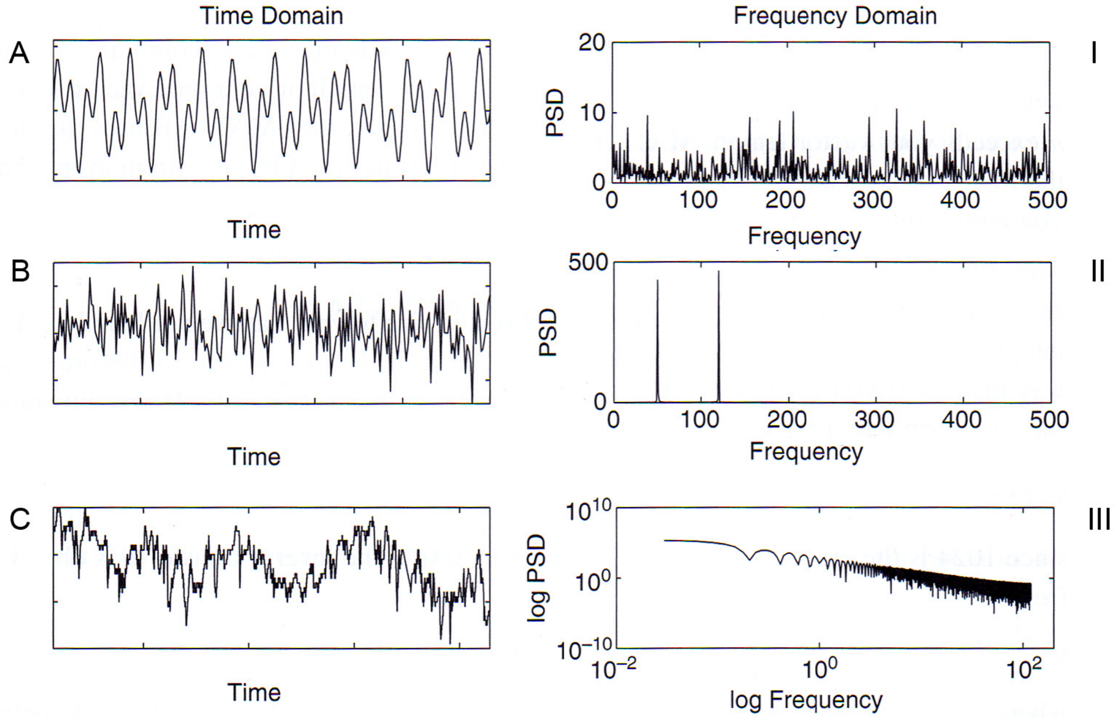
Les courbes définissent quatre régions du plan de phase correspondant aux quatre combinaisons des signes des taux de variations des variables d'état du système. Cette information permet d'esquisser l'allure des trajectoires de phase. Celles-ci convergent vers le point d'équilibre stable $(B_2^\star, N_2^\star)$. À l'inverse, l'équilibre $(B_2^\star, N_2^\star)$ apparaît bel et bien instable puisque les trajectoires s'en écartent.



Question III

Dans la colonne de gauche, on a représenté ci-dessous trois séries temporelles notées A, B et C (les échelles de temps et des valeurs ont été volontairement effacées). La colonne de droite présente, dans le désordre, les spectres obtenus par une analyse de Fourier (PSD = Power Spectral Density). Ces spectres, numérotés de I à III, sont représentés en fonction de la fréquence. Notez qu'une double échelle logarithmique est utilisée pour représenter le spectre III.

Associez chaque spectre à sa série temporelle en précisant tous les éléments qui justifient cette association.



- La série temporelle A fait apparaître des oscillations bien marquées à quelques fréquences seulement. Le signal ne fait pas apparaître de composante aux hautes fréquences. On lui associe donc naturellement le spectre de Fourier II qui est représentatif d'un signal obtenu en superposant deux signaux harmoniques.
- La série temporelle B montre encore des oscillations à des périodes relativement marquées, mais celles-ci sont partiellement masquées par un signal à de plus hautes fréquences. C'est le spectre I qui montre ces propriétés.
- La série temporelle C ne possède aucune structure temporelle visible et s'apparente à du bruit. Le spectre de Fourier représentant un tel signal est constitué d'un continuum de composantes, comme le spectre III.

Question IV

Définissez brièvement le concept de spline naturelle du troisième ordre en précisant les propriétés principales.

Une spline naturelle du troisième ordre est une fonction d'interpolation polynomiale définie par morceaux. Considérons les points de support (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ de l'interpolation. Sur chacun des $n-1$ intervalles du type $[x_i, x_{i+1}]$ on ajuste un polynôme du troisième ordre, ce qui introduit $4(n-1)$ paramètres. Ceux-ci sont fixés en demandant à la spline

- de passer par les points de supports ;
- d'avoir des dérivées premières et secondes continues au passage d'un intervalle à l'autre.

Dans le cas d'une spline naturelle, on demande en plus l'annulation de la dérivée première aux extrémités x_1 et x_n de l'intervalle sur lequel l'interpolation est réalisée.

La spline naturelle est particulièrement agréable à l'œil ; elle épouse naturellement la courbe esquissée par les points de support. En termes mathématiques, ceci se traduit par le fait qu'elle réalise le minimum de la mesure de la courbure totale

$$\int_{x_1}^{x_n} [f''(t)]^2 dt$$

Question V

De quel type est l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad ?$$

Que décrit une telle équation ? Quelles conditions initiales et/ou aux limites faut-il introduire pour obtenir un problème bien posé ?

L'équation différentielle est du type parabolique. Typiquement, elle est utilisée pour représenter la dynamique de la diffusion. Dans ce cas, le coefficient κ mesure la diffusivité de la propriété étudiée.

Cette équation étant du premier ordre par rapport au temps, il convient de fixer une condition initiale précisant la distribution de la variable C à l'instant initial, dans tout le domaine étudié.

L'équation est du second ordre par rapport à la coordonnée spatiale x. Il faut donc donner deux conditions aux limites.

Dans un domaine borné, on pourra par exemple imposer la valeur de C aux deux extrémités de cet intervalle. De façon alternative, on peut imposer la valeur de la dérivée spatiale en l'une ou l'autre de ces limites du domaine ou, de façon plus physique, la valeur du flux

$$-\kappa \frac{\partial C}{\partial x}$$

Dans un domaine semi-infini ou infini, on imposera également une condition limite à chaque extrémité du domaine étudié. En l'infini, on supposera généralement que C ou sa dérivée est bornée.