OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

Prof. Éric J.M.DELHEZ

JANVIER 2019

Fin de l'épreuve à 12 h.
Indiquez vos nom et prénom sur chacune de vos feuilles.
L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.

QUESTION I

Dans la théorie de la turbulence, la longueur de Kolmogorov η caractérise les plus petits tourbillons présents dans l'écoulement. De par sa nature même, cette longueur est une fonction de la viscosité cinématique du fluide ν et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε, *i.e.* de la quantité d'énergie devant être dissipée à chaque instant.

On sait que l'énergie cinétique turbulente par unité de masse k (= $0.5 < \|\mathbf{v}'\|^2 >$ où $\mathbf{v}'$ désigne les fluctuations turbulentes de la vitesse et où $< \cdot >$ désigne l'opérateur de moyenne d'ensemble) obéit à l'équation

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla k = \tilde{\nu} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\|^2 - \tilde{\lambda} \frac{\partial b}{\partial z} - \varepsilon$$

où $\mathbf{v}$ désigne la vitesse, b est la poussée, t est le temps, z désigne la coordonnée verticale et où $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\lambda}$ sont des coefficients de diffusion turbulente tels que $[\tilde{\nu}] = [\tilde{\lambda}] = [\nu]$.

i. Déterminez les dimensions de η, k, ε, b et ν.

ii. Déterminez la combinaison des paramètres ε et ν permettant de définir, à une constante multiplicative près, la longueur de Kolmogorov.

QUESTION II

On considère la dynamique de deux populations dont l'évolution temporelle est décrite par les variables adimensionnelles $x(t)$ et $y(t)$ et les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \beta xy \\ \dot{y} = \mu x - \beta xy \end{cases}$$

où β et μ sont deux paramètres strictement positifs.

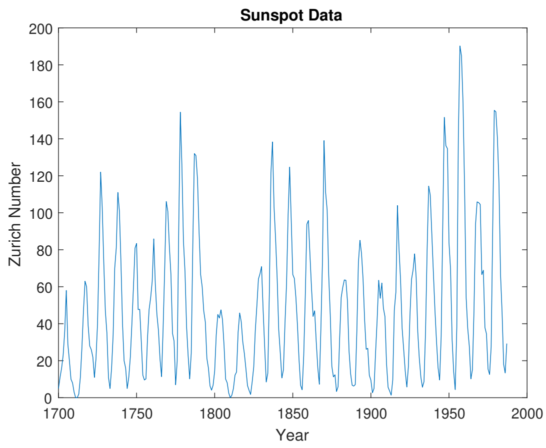
i. Donnez une interprétation plausible de chacun des termes apparaissant dans le membre de droite et caractérisez l'interaction entre les deux espèces.

ii. Déterminez toutes les positions d'équilibre éventuelles de ce système.

iii. Discutez la stabilité des positions d'équilibre dans le cas où $\beta = 2$.

Question III

On considère les données représentées ci-dessous sur le nombre et la taille des taches solaires (Zurich Number) répertoriées chaque année depuis 1700. Le tableau présente l'analyse FFT de 256 de ces données annuelles ; seules les composantes les plus importantes sont listées.



k	FFT : X_k	$\|X_k\|$	$\arg X_k$ (rad)
0	11464+0i	11464	0
3	660.67+1675.8i	1801.3	1.1953
5	-835.35+1421.6i	1648.9	2.1021
6	403.05+635.15i	752.24	1.0053
7	-147.3+721.31i	736.2	1.7722
16	-713.59+63.054i	716.37	3.0535
18	-767.13-332.95i	836.27	-2.7321
19	-469.9+520.11i	700.95	2.3055
21	-24.393-1220i	1220.2	-1.5908
22	-769.54+1111.9i	1352.2	2.1762
23	-2867.8-2158.4i	3589.3	-2.4964
24	-508.58-791.26i	940.61	-2.142
25	-518.85+814.85i	966.01	2.1378
26	1874.5-562.87i	1957.2	-0.29171
27	495.07-836.64i	972.14	-1.0365
29	660.5+483.2i	818.38	0.6316
30	509.08-823.15i	967.86	-1.0169
31	-839.26+249.55i	875.57	2.8526

i. Pourquoi l'analyse a-t-elle été réalisée sur 256 données seulement ?

ii. Estimez la valeur moyenne du *Zurich Number* à partir de la figure montrant son évolution temporelle. Cette valeur peut-elle être obtenue en utilisant les résultats de la FFT ? Expliquez.

iii. Déterminez la période et l'amplitude des trois composantes qui dominent le spectre de variation du *Zurich Number*.

iv. Le résultat porté dans la colonne $\arg X_k$ (rad) est relatif à l'argument de X_k. Que signifie ce résultat ?

v. Comment peut-on améliorer la résolution spectrale, *i.e.* la précision sur les périodes caractéristiques du signal décrit par les données ?

Question IV

Définissez brièvement chacun des termes suivants (définition mathématique + interprétation éventuelle) :

i. Gradient d'une fonction scalaire .

ii. Régression linéaire.

iii. Interpolation par fonction spline.

SOLUTION TYPE

QUESTION I

i. La longueur de Komogorov étant une longueur, il vient directement $[\eta] = L$.
En application de la définition, les dimensions de l'énergie cinétique par unité de masse sont

$$[k] = [0.5\|\mathbf{v}'\|^2] = (LT^{-1})^2 = L^2T^{-2}$$

Tous les termes de l'équation différentielle décrivant la dynamique de la turbulence possèdent les mêmes dimensions. Dès lors,

$$[\varepsilon] = \left[\frac{\partial k}{\partial t}\right] = \frac{[k]}{[t]} = L^2T^{-3}$$

De même, de

$$\left[\tilde{\nu}\left\|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right\|^2\right] = [\varepsilon]$$

on déduit

$$[\nu] = [\tilde{\lambda}] = [\tilde{\nu}] = \frac{[\varepsilon]}{\left[\left\|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right\|^2\right]} = \frac{L^2T^{-3}}{(T^{-1})^2} = L^2T^{-1}$$

Enfin, de l'égalité

$$\left[\tilde{\lambda}\frac{\partial b}{\partial z}\right] = [\varepsilon]$$

on tire

$$[b] = \frac{[z][\varepsilon]}{[\tilde{\lambda}]} = \frac{L^3T^{-3}}{L^2T^{-1}} = LT^{-2}$$

ii. On peut former une longueur caractéristique η en combinant ε et ν selon

$$\eta = \varepsilon^{\alpha}\nu^{\beta}$$

où les exposants α et β doivent être choisis pour que

$$L = [\eta] = [\varepsilon^{\alpha}\nu^{\beta}] = L^{2\alpha+2\beta}T^{-3\alpha-\beta}$$

En égalant les exposants de L et T dans les deux membres de cette relation, il vient

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ -3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1/4 \\ \beta = 3/4 \end{cases}$$

La longueur de Komogorov est donc définie par

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}$$

Question II

i. Dans le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - \beta xy \\ \dot{y} = \mu x - \beta xy \end{cases}$$

l'interaction entre les deux compartiments décrits par les variables x et y est défavorable aux deux compartiments. Il peut donc d'agir d'une compétition pour des ressources identiques.

En l'absence de y, la population x croîtrait indéfiniment ; le terme x^2 représente une croissance que seule la présence de y peut limiter.

La population y est le résultat de la présence du x, comme l'indique le terme μx. Le modèle peut donc, par exemple, décrire la dynamique d'une population x affectée par une mutation donnant naissance à la population y. Beaucoup d'autres interprétations du même type peuvent être imaginées.

ii. Les configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\begin{cases} 0 = x^2 - \beta xy \\ 0 = \mu x - \beta xy \end{cases}$$

Ces deux conditions sont simultanément vérifiées soit pour $x = 0$ et $y = y^\star$ quelconque, soit pour $(x, y) = (\mu, \mu/\beta)$

iii. Dans le cas où $\beta = 2$, les configurations d'équilibres sont $x = 0$ et $y = y^\star$ quelconque, d'une part, et $(x, y) = (\mu, \mu/2)$, d'autre part.

Pour déterminer la stabilité de ces configurations d'équilibre, on étudie les valeurs propres de la matrice de communauté

$$\mathsf{A}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - \beta y & -\beta x \\ \mu - \beta y & -\beta x \end{pmatrix}$$

(a) Pour étudier la stabilité de $(0, y^\star)$, on considère donc

$$\mathsf{A}(0, y^\star) = \begin{pmatrix} -\beta y^\star & 0 \\ \mu - \beta y^\star & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 0 et $-\beta y^\star$. Ces valeurs propres étant négatives ou nulles, l'équilibre est (marginalement) stable.

(b) En $(x, y) = (\mu, \mu/2)$, on a

$$\mathsf{A}(x, y) = \begin{pmatrix} \mu & -2\mu \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix}$$

Une des valeurs propres étant positives, l'équilibre est instable.

Question III

i. La transformée de Fourier rapide (FFT) est calculée au moyen d'un algorithme s'appliquant efficacement si et seulement si le nombre de données considérées est une puissance de 2. Ici, $256 = 2^8$.

ii. Visuellement, on peut estimer la moyen du Zurich Number à 30-50. Ce résultat peut être retrouvé dans la transformée de Fourier puisque, selon la convention adoptée pour le calcul de la FFT, la moyenne correspond à $|X_0|$ à un facteur $\sqrt{N}$ ou N près. Les résultats présentés correspondent très clairement à la convention impliquant un facteur N, dès lors, la moyenne du Zurich Number est précisément donnée par

$$\frac{|X_0|}{N} = \frac{11\,464}{256} = 44.78$$

iii. Le spectre est dominé par les composantes d'indice k égal 23, 26 et 3. La période fondamentale étant égale à 256 ans, il leur correspond des périodes de

$$T_{23} = \frac{256}{23} \approx 11.13 \text{ ans}, \qquad T_{26} = \frac{256}{26} \approx 9.84 \text{ ans} \qquad \text{et} \qquad T_3 = \frac{256}{3} \approx 85.33 \text{ ans}$$

En raison du replis du spectre, les amplitudes correspondantes sont données par

$$A_{23} = 2\frac{|X_{23}|}{N} = \frac{2 \times 3589}{256} \approx 28.04, \qquad A_{26} = 2\frac{|X_{26}|}{N} \approx 15.29 \qquad \text{et} \qquad A_3 = 2\frac{|X_3|}{N} \approx 14.07$$

iv. L'argument de la transformée de Fourier indique le déphasage respectifs des différents signaux harmoniques permettant de reconstituer le signal total.

v. Les composantes de périodes proches peuvent être identifiées en augmentant la durée totale d'observation T. En effet, la résolution fréquentielle est donnée par $\frac{2\pi}{T}$.

Question IV

Voir notes de cours.