OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

Prof. Éric J.M.DELHEZ

JANVIER 2018

Fin de l'épreuve à 12 h.
Indiquez vos nom et prénom sur chacune de vos feuilles.
L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.

QUESTION I

i. Énoncez la formule de Taylor permettant d'approcher les variations de $f(x)$ au voisinage de x_0 par un polynôme de degré deux en $(x-x_0)$.

ii. Dans l'état de référence, la masse volumique de l'océan peut être décrite par

$$\rho(z) = \rho_0 \, e^{-z/D} \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{c^2}{g}$$

où ρ_0 désigne la valeur de la masse volumique en surface, z est la profondeur, c est la vitesse du son dans l'eau et g est l'accélération de la pesanteur g.

(a) Déterminez les dimensions des variables/paramètres ρ, ρ_0, c, g et D intervenant dans l'expression ci-dessus.

(b) En utilisant des valeurs typiques de z et D, montrez que le rapport z/D peut être considéré comme petit par rapport à l'unité.

(c) Supposant $z/D \ll 1$, appliquez la formule de Taylor au voisinage de $z = 0$ pour approcher les variations de $\rho(z)$ par une expression linéaire en z.

iii. En utilisant la formule Taylor, déterminez une approximation du second ordre de la dérivée seconde d'une fonction T au point z_0 en vous appuyant sur des mesures ponctuelles de $T(z_0)$, $T(z_0+\Delta z)$ et $T(z_0-\Delta z)$, *i.e.* déterminez les coefficients α, β et γ tels que

$$T''(z_0) = \alpha T(z_0-\Delta z) + \beta T(z_0) + \gamma T(z_0+\Delta z) + O(\Delta z^2)$$

QUESTION II

On dispose de mesures expérimentales (t_i, J_i) du rayonnement solaire à midi pendant les 365 jours d'une année complète (où $t_i \in [1, 365]$ désigne le jour de l'année et J_i le flux solaire correspondant exprimé en W/m^2).

i. Expliquez comment ajuster une courbe théorique du type

$$J(t) = J_0 + A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{365}$$

à ces données pour représenter l'évolution saisonnière, *i.e.* comment choisir les paramètres J_0, A et ϕ pour approcher au mieux les observations.
Suggestion : Utilisez la formule de $\cos(A+B)$ *pour développer* $\cos(\omega t + \phi)$.

ii. Les paramètres J_0, A et ϕ peuvent-ils également être reliés à la transformée de Fourier discrète des mesures expérimentales ? Expliquez.

QUESTION III

On considère un système de deux espèces planctoniques dont l'évolution des concentrations x et y est décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-2x-y) \\ \dot{y} = 3y(1-y-x) \end{cases}$$

i. Interprétez les différents termes des deux équations et identifiez le type d'interaction entre les deux espèces.
ii. Identifiez les éventuelles configurations d'équilibre du système.
iii. Caractérisez la stabilité des configurations d'équilibre identifiées en ii.
iv. Si on considère des conditions initiales telles que $(x,y) = (0.6, 0.2)$, vers quel état évoluera le système ? Justifiez par un raisonnement dans le plan de phase.

QUESTION IV

Définissez brièvement (5 lignes maximum par définition) chacun des concepts suivants :

i. fonctions asymptotiques au voisinage de x_0, *i.e.* $f \sim g \quad (x \to x_0)$;
ii. dérivée directionnelle d'une fonction, *i.e.* $D_{\mathbf{e}} f$;
iii. filtre gaussien ;
iv. interpolation spline ;
v. équation de continuité.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Pour tout fonction f suffisamment régulière, la formule de Taylor permet d'écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + O[(x-x_0)^3], \qquad (x \to x_0)$$

ii. Soit $\rho(z) = \rho_0 \, e^{-z/D}$ avec $D = c^2/g$

(a) On a, en exploitant la signification physique des variables,

$$[\rho] = [\rho_0] = ML^{-3}, \qquad [z] = L, \qquad [c] = LT^{-1}, \qquad [g] = LT^{-2}$$

de sorte que

$$[D] = \frac{[c]^2}{[g]} = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L$$

(b) Puisque $g \approx 10$ m/s et que $c \approx 1500$ m/s, la distance caractéristique $D \approx 225$ km est bien supérieure à la profondeur z, qui ne peut dépasser la profondeur maximale de l'océan (11 km), de sorte que $z/D \ll 1$.

(c) Affin d'appliquer la formule de Taylor à la fonction $f(x) = e^{-x}$ au voisinage de $x_0 = 0$, on calcule

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \qquad & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -e^{-x} \qquad & f'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Il vient ensuite

$$e^{-x} = 1 - x + O(x^2), \qquad (x \to 0)$$

et, exploitant cette expression avec $x = z/D$,

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{D}\right) + O(z^2/D^2), \qquad (z/D \to 0)$$

iii. Par application de la formule de Taylor, on a

$$T(z_0 - \Delta z) = T(z_0) - f'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 - \frac{1}{3!}T'''(z_0)\Delta z^3 + O(\Delta z^4), \qquad (\Delta z \to 0)$$

$$T(z_0 + \Delta z) = T(z_0) + T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 + \frac{1}{3!}T'''(z_0)\Delta z^3 + O(\Delta z^4), \qquad (\Delta z \to 0)$$

La combinaison proposée conduit dès lors à

$$\begin{aligned} &\alpha T(z_0 - \Delta z) + \beta T(z_0) + \gamma T(z_0 + \Delta z) = (\alpha+\beta+\gamma)T(z_0) \\ &\quad + (\gamma - \alpha)T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)T''(z_0)\Delta z^2 + \frac{1}{3!}(\gamma-\alpha)T'''(z_0)\Delta z^3 + O(\Delta z^4), \qquad (\Delta z \to 0) \end{aligned}$$

Pour que celle-ci soit égale à $T''(x_0)$ à une erreur $O(\Delta z^2)$ près, il suffit donc que les constantes α, β et γ soient telles que

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \gamma - \alpha \\ 1 = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\Delta z^2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\Delta z^2} \\ \beta = -\frac{2}{\Delta z^2} \\ \gamma = \frac{1}{\Delta z^2} \end{cases}$$

On a donc

$$T''(z_0) = \frac{T(z_0 - \Delta z) - 2T(z_0) + T(z_0 + \Delta z)}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2)$$

Question II

i. La loi proposée peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} J(t) &= J_0 + A\cos(\omega t + \phi) \\ &= J_0 + A(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi) \\ &= a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t \end{aligned}$$

où les paramètres

$$a_0 = J_0, \qquad a_1 = A\cos\phi, \qquad a_2 = -A\sin\phi$$

apparaissent linéairement. La méthode de régression linéaire est donc applicable. Elle permet de déterminer les valeurs optimales de ces paramètres a_0, a_1 et a_2 au sens des moindres carrés.

Pour mener à bien cette recherche on recherche le minimum de la somme des carrés des erreurs

$$SSE = \sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1\cos\omega t_i + a_2\sin\omega t_i - J_i)^2$$

(où $N = 365$) en résolvant le système d'équations linéaires (3 équations à 3 inconnues)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SSE}{\partial a_0} = 0 = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1\cos\omega t_i + a_2\sin\omega t_i - J_i) \\ \dfrac{\partial SSE}{\partial a_1} = 0 = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\cos\omega t_i(a_0 + a_1\cos\omega t_i + a_2\sin\omega t_i - J_i) \\ \dfrac{\partial SSE}{\partial a_2} = 0 = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sin\omega t_i(a_0 + a_1\cos\omega t_i + a_2\sin\omega t_i - J_i) \end{cases}$$

Les valeurs de a_0, a_1 et a_2 ainsi déterminées permettent de calculer les coefficients apparaissant dans la loi initiale selon

$$J_0 = a_0, \qquad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\phi = -\frac{a_2}{a_1}$$

ii. L'application de l'analyse de Fourier (FFT) aux données expérimentales $\{J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_{365}\}$ fournit 365 valeurs $\{\tilde{J}_0,\ \tilde{J}_1,\ \ldots,\ \tilde{J}_{364}\}$ correspondant à la valeur moyenne du signal, à la composante fondamentale de période $T_1 = 365$ jours et aux harmoniques dont les périodes sont les sous-multiples de T_1.

Pour extraire un signal du type attendu, *i.e.*

$$J(t) = J_0 + A\cos(\omega t + \phi)$$

il suffit de reconstruire le signal en se basant exclusivement sur $\tilde{J}_0$ et $\tilde{J}_1$. Plus précisément, compte tenu de l'interprétation des coefficients de Fourier, on a

$$J_0 = \frac{\tilde{J}_0}{\sqrt{N}}, \qquad A = 2\frac{\|\tilde{J}_1\|}{\sqrt{N}}, \qquad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\Im(\tilde{J}_1)}{\Re(\tilde{J}_1)}$$

Question III

i. Lorsque y est absent, la dynamique de x est décrite par

$$\dot{x} = x(1 - 2x)$$

qui représente la croissance logistique de la première espèce (croissance limitée par les ressources). La dynamique de la seconde espèce est également celle d'une croissance logistique si $x = 0$.

Dans le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-2x-y) \\ \\ \dot{y} = 3y(1-y-x) \end{cases}$$

on constate que la présence de x (resp. de y) a un effet négatif sur la croissance de y (resp. de x). Ceci traduit donc la compétition des deux espèces pour une même ressource.

ii. Les configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\begin{cases} f(x,y) = x(1-2x-y) = 0 \\ \\ g(x,y) = 3y(1-y-x) = 0 \end{cases}$$

soit

$$(x,y) = (0,0), \qquad (x,y) = (1/2,0) \qquad \text{et} \qquad (x,y) = (0,1)$$

iii. La stabilité des configurations d'équilibre peut être examinée d'après le signe des valeurs propres de la matrice de communauté

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4x-y & -x \\ \\ -3y & 3(1-x-2y) \end{pmatrix}$$

évaluée en les différentes configurations d'équilibre.

En $(0,0)$, on a

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres $\{1,\ 3\}$ sont positives. Cet équilibre est donc instable.

En $(0,1)$, on a

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres $\{0,\ -3\}$ sont négatives ou nulles. Cet équilibre est donc stable.

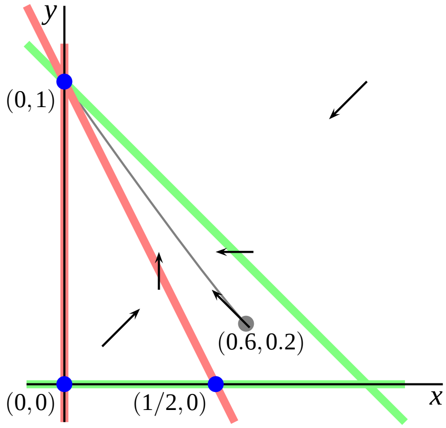
En $(1/2,0)$, on a

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\{-1,\ 3/2\}$. L'une d'entre elles étant positive, cet équilibre est instable.

iv. La condition initiale $(x,y) = (0.6,0.2)$ ne correspondant pas à une position d'équilibre et le système possédant la seule configuration d'équilibre stable $(1,0)$, il évolue vers cette configuration. La seconde espèce, dont la concentration est mesurée par la variable y, apparaît donc mieux armée que la première qui tend à s'éteindre.

On peut se convaincre de cette évolution en considérant la dynamique du système dans le plan de phase (x,y).



Les nulliclines $f = 0$ (en rouge) et $g = 0$ (en vert) sont représentées ci-dessus. Les intersections de deux droites des deux familles permettent d'identifier les positions d'équilibre.

Par ailleurs, les nulliclines définissent trois régions de l'espace dans lesquelles les signes des dérivées $(\dot{x}, \dot{y})$ sont homogènes.

On constate que la trajectoire de phase passant par le point $(x, y) = (0.6, 0.2)$ ne peut sortir de la région du plan de phase dans laquelle $\dot{x} < 0$ et $\dot{y} > 0$. La trajectoire converge donc vers $(0, 1)$, comme annoncé.

Question IV

Cf. notes de cours.