Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

JANVIER 2017

Durée maximale de l'épreuve : 3 heures 30.
Indiquez vos nom et prénom sur chacune de vos feuilles.
L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.

Question I

On considère l'évolution de deux populations dont la biomasse (exprimée en kg par m^3) est représentée par les variables $x(t)$ et $y(t)$. L'interaction des deux espèces est décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - mx^2y \\ \dot{y} = qy - ny^2 \end{cases}$$

où r, m, q et n sont des constantes strictement positives.

i. Déterminez les dimensions de r, m, q et n.

ii. On introduit les variables et paramètres

$$X = \frac{mx}{n}, \qquad Y = \frac{yn}{q}, \qquad \tau = \frac{t}{t_\star}, \qquad \alpha = \frac{r}{q}$$

Déterminez la valeur de $t_\star$ permettant de mettre le système différentiel sous la forme

$$\begin{cases} X' = \alpha X - X^2 Y \\ Y' = Y - Y^2 \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \frac{d}{d\tau} = (\cdot)' \qquad (\heartsuit)$$

iii. Déterminez les éventuelles positions d'équilibre (X_0, Y_0) du système décrit par $(\heartsuit)$.

iv. Calculez la matrice de communauté en chacune des configurations d'équilibre identifiées en iii. et déduisez-en la stabilité de cet équilibre.

v. Décrivez la dynamique du système dans le plan de phase (X, Y).

Question II

On dispose de deux mesures indépendantes de la température au même endroit et au même instant. La première mesure, T_1, est obtenue avec une méthode expérimentale non biaisée (erreur moyenne nulle) et une incertitude σ_1 (écart-type de mesures répétées dans des conditions identiques). La seconde mesure, T_2, utilise une autre méthode qui n'introduit pas non plus de biais et est caractérisée par une erreur standard $\sigma_2 > \sigma_1$.

Déterminez la meilleure estimation de la température obtenue en combinant linéairement les deux mesures indépendantes T_1 et T_2. Justifiez en détaillant votre raisonnement. Quantifiez l'erreur associée à cette estimation.

Question III

Disposant des mesures de hauteur d'eau prises toutes les 10 minutes à Hoek van Holland (mer du Nord), on construit une série temporelle de 4096 observations ζ_j couvrant une période totale d'environ 28 jours. La hauteur d'eau est exprimée en centimètres. En utilisant Excel, on réalise une analyse FFT de ces données et on obtient les résultats ci-dessous (seules les valeurs les plus importantes sont reprises dans le tableau).

k	FFT : X_k	$\lvert X_k\rvert$	$\arg X_k$ (rad)
0	28181	28181	0.00
1	60669-23611 i	65101	-0.37
2	-14063-13685 i	19623	-2.37
3	-390+11315 i	11322	1.61
5	12657+ 9075 i	15575	0.62
7	13448-14399 i	19703	-0.82
8	-16442-11395 i	20005	-2.54
9	-12791+ 9153 i	15729	2.52
10	1928+16837 i	16947	1.46
11	1800+12382 i	12512	1.43
27	11705+13686 i	18009	0.86
28	2141+15209 i	15359	1.43
53	-8873+ 8843 i	12527	2.36
54	1726-24893 i	24953	-1.50
55	-59187-151259 i	162427	-1.94
56	18849+11769 i	22222	0.56
57	-33803- 2479 i	33894	-3.07
109	-12289+ 1140 i	12342	3.05
110	-24607+19104 i	31153	2.48
112	4606+17820 i	18405	1.32

i. Précisez la signification des données portées dans les colonnes sous les titres $|X_k|$ et $\arg X_k$. Comment ces valeurs sont-elles calculées à partir des X_k ?

ii. Déterminez la période et l'amplitude des trois composantes qui dominent le spectre.

iii. Déterminez la valeur moyenne du signal.

iv. Le signal contient des composantes liées à la marée semi-diurne lunaire (M_2, période = 44 714 s) et d'autres liées à la composante semi-diurne solaire (S_2, période = 43 200 s). Pourquoi ces fréquences n'apparaissent-elles pas exactement dans l'analyse ? Que doit-on faire si on veut distinguer plus nettement les deux composantes ?

Question IV

Définissez brièvement (10 lignes maximum) chacun des concepts suivants :

i. Divergence d'un champ vectoriel.

ii. Interpolation par distance inverse.

iii. Analyse objective.

iv. Temps caractéristique intégral.

v. Équation différentielle hyperbolique.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Les variables x et y désignent des biomasses par unité de volume. Dès lors,

$$[x] = [y] = ML^{-3}$$

En vertu du principe d'homogénéité des équations, on a

$$[\dot{x}] = [rx] = [r][x], \qquad [\dot{y}] = [qy] = [q][y] \qquad \text{où} \qquad [\dot{x}] = [x]T^{-1} \quad \text{et} \quad [\dot{y}] = [y]T^{-1}$$

Dès lors

$$[r] = [q] = T^{-1}$$

Par le même principe, on a également

$$[rx] = [mx^2y] \qquad \Rightarrow \qquad [m] = \frac{[rx]}{[x^2y]} = \frac{[r]}{[x][y]} = \frac{T^{-1}}{(ML^{-3})^2} = M^{-2}L^6T^{-1}$$

Enfin, à partir de la seconde équation, on détermine aisément

$$[n] = \frac{[qy]}{[y^2]} = \frac{[q]}{[y]} = M^{-1}L^3T^{-1}$$

ii. Remarquons d'abord que les variables et paramètres X, Y et α sont sans dimensions puisque

$$[X] = \frac{[m][x]}{[n]} = \frac{M^{-2}L^6T^{-1}ML^{-3}}{M^{-1}L^3T^{-1}} = 1$$

$$[Y] = \frac{[y][n]}{[q]} = \frac{ML^{-3}M^{-1}L^3T^{-1}}{T^{-1}} = 1$$

$$[\alpha] = \frac{[r]}{[q]} = \frac{T^{-1}}{T^{-1}} = 1$$

Puisque $\tau = t/t_\star$, on a

$$\dot{(\cdot)} = \frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{t_\star}\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{t_\star}(\cdot)'$$

En injectant ce résultat et les expressions des variables adimensionnelles dans le système différentiel, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{n}{mt_\star}X' = r\dfrac{n}{m}X - m\dfrac{n^2q}{m^2n}X^2Y \\ \dfrac{q}{nt_\star}Y' = q\dfrac{q}{n}Y - n\dfrac{q^2}{n^2}Y^2 \end{cases}$$

soit, en simplifiant,

$$\begin{cases} X' = rt_\star X - qt^\star X^2Y \\ Y' = qt_\star Y - qt_\star Y^2 \end{cases}$$

Pour obtenir la forme souhaitée, il suffit donc de choisir $t_\star = 1/q$, ce qui conduit à

$$\begin{cases} X' = \alpha X - X^2Y \\ Y' = Y - Y^2 \end{cases}$$

iii. Les configurations d'équilibre sont les solutions de $X' = Y' = 0$, *i.e.*

$$\begin{cases} 0 = X(\alpha - XY) \\ 0 = Y(1 - Y) \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire $Y = 0$ ou $Y = 1$.
Dans le cas où $Y = 0$, la première équation conduit à $X = 0$.
Dans le cas où $Y = 1$, la première équation est vérifiée pour $X = 0$ ou pour $X = \alpha$.
En conclusion, il existe donc toujours trois positions d'équilibre correspondant aux couples (X,Y) donnés par

$$(0,0), \qquad (0,1) \qquad \text{et} \qquad (\alpha,1)$$

iv. La matrice de communauté est définie par

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X} & \dfrac{\partial f}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial X} & \dfrac{\partial g}{\partial Y} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} f(X,Y) = \alpha X - X^2 Y \\ g(X,Y) = Y - Y^2 \end{cases}$$

Évaluant les différentes dérivées, on obtient

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha - 2XY & -X^2 \\ 0 & 1 - 2Y \end{pmatrix}$$

- Au point $(0,0)$, on a

  $$\mathsf{A}(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Les deux valeurs propres étant positives, cette configuration d'équilibre est instable.
- Au point $(0,1)$, on a

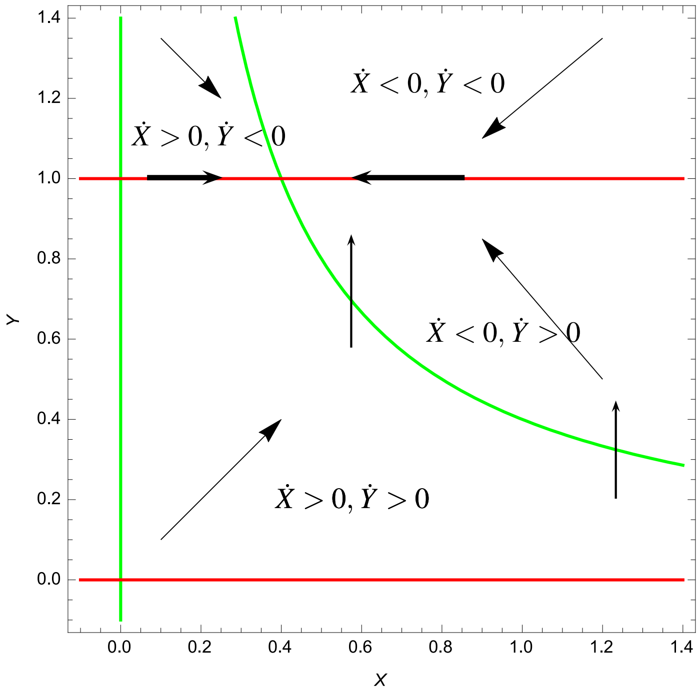
  $$\mathsf{A}(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Cet équilibre est également instable puisque la matrice de communauté possède une valeur propre positive.
- Au point $(\alpha,1)$, on a

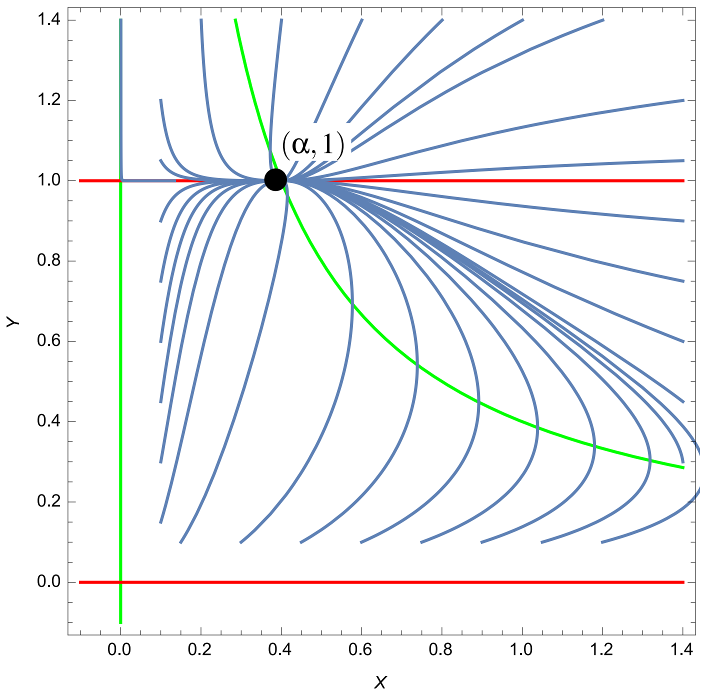
  $$\mathsf{A}(\alpha,1) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Les valeurs propres sont $-\alpha$ et -1. Elles sont toutes deux strictement négatives, de sorte que l'équilibre est stable.

v. La dynamique peut être discutée dans le plan de phase (X,Y).
Les isoclines $f = 0$ correspondent à la droite $X = 0$ et à l'hyperbole équilatère $XY = \alpha$.
Les isoclines $g = 0$ correspondent aux deux droites $Y = 0$ et $Y = 1$.
Les deux familles d'isoclines se croisent aux positions d'équilibre identifiées plus haut. Elle définissent 4 régions du plan de phase correspondant à des évolutions temporelles différentes des variables.



Sur cette base, on peut esquisser les trajectoires dans le plan de phase. Toutes les trajectoires convergent vers la seule configuration d'équilibre stable $(\alpha, 1)$.



Question II

Les deux mesures T_1 et T_2 sont considérées comme deux réalisations de variables aléatoires telle que, notant T_t la valeur vraie à estimer,

$$\begin{cases} T_1 = T_t + \varepsilon_1 \\ T_2 = T_t + \varepsilon_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E[\varepsilon_1] = E[\varepsilon_2] = 0 \\ E[\varepsilon_1^2] = \sigma_1^2, \quad E[\varepsilon_2^2] = \sigma_2^2 \end{cases}$$

On construit une estimateur linéaire T_e de la température en combinant les deux mesures en formant

$$T_e = w_1 T_1 + w_2 T_2 = (w_1 + w_2) T_t + w_1 \varepsilon_1 + w_2 \varepsilon_2$$

où w_1 et w_2 désignent les poids respectifs des deux mesures.

Pour que l'estimateur soit non biaisé, on doit avoir

$$T_t = E[T_e] = (w_1 + w_2)T_t + w_1 E[\varepsilon_1] + w_2 E[\varepsilon_2] = (w_1 + w_2)T_t$$

Ceci introduit la contrainte

$$w_1 + w_2 = 1$$

sur les poids.

Si les poids vérifient cette contrainte, l'erreur de l'estimateur est donnée par

$$\varepsilon = T_e - T_t = w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2$$

Sa variance peut être exprimée sous la forme

$$E[\varepsilon^2] = w_1^2 E[\varepsilon_1^2] + w_2^2 E[\varepsilon_2^2] + 2w_1 w_2 E[\varepsilon_1\varepsilon_2]$$

Si les deux mesures sont indépendantes, on a $E[\varepsilon_1\varepsilon_2] = 0$ et l'expression de la variance se réduit à

$$E[\varepsilon^2] = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2$$

Afin de déterminer le meilleur estimateur, on recherche le minimum de cette expression par rapport à w_1. Le poids w_1 correspondant est donné par

$$\frac{\partial E[\varepsilon^2]}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 - 2(1 - w_1)\sigma_2^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

En conclusion, le meilleur estimateur linéaire non biaisé de la température est donné par

$$T_e = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} T_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} T_2$$

L'incertitude sur la mesure T_1 étant inférieure à celle sur T_2, le poids de T_1 dans l'estimation est supérieur à celui de T_2.

L'erreur associée est caractérisée par

$$E[\varepsilon^2] = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 = \frac{\sigma_2^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}\sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Question III

i. Les données apparaissant sous le titre $|X_k|$ sont les modules des nombres complexes X_k fournis par l'analyse FFT. Sous le titre $\arg X_k$, on retrouve l'argument correspondant.
Si $X_k = a + ib$, alors

$$|X_k| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \mathrm{tg}(\arg X_k) = \frac{b}{a}$$

ii. Les composantes qui dominent le spectre sont celles qui correspondent aux valeurs les plus grandes de $|X_k|$. Ce sont les harmoniques numéro 1, 55 et 57.
La période de l'harmonique numéro k est donnée par

$$T_k = \frac{T_1}{k} \qquad \text{où} \qquad T_1 = N\Delta t = 4096 \times 600 \text{ s} = 28.44 \text{ j}$$

où T_1 désigne la durée d'observation.
En fonction de la définition utilisée par Excel, l'amplitude des composantes est liée à $|X_k|$ par (rappelons que les différentes définitions de la FFT diffèrent par le facteur 1, $1/\sqrt{N}$ ou $1/N$ reliant $|X_k|$ à l'amplitude)

$$A_k = \frac{2|X_k|}{N}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N/2$$

k	FFT : X_k	$\lvert X_k \rvert$	$\arg X_k$ (rad)	T_k (jour)	A_k (cm)
1	60669-23611 i	65101	-0.37	28.44	31.8
55	-59187-151259 i	162427	-1.94	0.517	79.3
57	-33803- 2479 i	33894	-3.07	0.499	16.6

iii. La valeur moyenne $\bar{\zeta}$ de l'élévation est directement liée à l'harmonique numéro 0 par la relation

$$\bar{\zeta} = \frac{|X_0|}{N} = \frac{28181}{4096} = 6.9 \text{ cm}$$

iv. Par construction, seules les périodes qui sont des sous-multiples de la période de base T_0 sont représentées exactement. Puisque la période totale d'observation T_0 est de 2 457 600 s, les harmoniques les plus proches des périodes des composantes M_2 et S_2 sont caractérisées par les périodes

$$T_{54} = 45511\ s, \quad T_{55} = 44683\ s, \quad T_{56} = 43886\ s, \quad T_{57} = 43116\ s$$

Pour augmenter la résolution spectrale, il convient d'utiliser des observations couvrant une plus longue période de temps.

Question IV

i. La *divergence d'un champ vectoriel* $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ est définie par

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Comme son nom l'indique, elle mesure la tendance locale du champ $\mathbf{v}$ à diverger.

ii. L'*interpolation par distance inverse* est une technique d'interpolation qui consiste à calculer la valeur locale par une moyenne pondérée des valeurs observées T_i selon

$$T(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} w_i(x,y,z) T_i$$

où le poids $w_i(x,y,z)$ de l'observation i dans l'interpolation est inversement proportionnel à une certaine puissance p (généralement $p = 2$) de la distance entre l'endroit de la mesure et le point (x,y,z) considéré.

iii. L'*analyse objective* consiste en une reconstruction d'un champ x_a sur base d'un champ de référence et d'observations ponctuelles selon

$$\mathsf{x}_a = \mathsf{x}_{ref} + \mathsf{W}(\mathsf{y}_{obs} - \mathsf{y}_{ref})$$

où y_{obs} désigne le vecteur des observations et où x_{ref} et y_{ref} sont les valeurs du champ de référence respectivement aux points où l'analyse est effectuée et aux points de mesure. La matrice des poids W prend en compte la variance/co-variance du champ de référence — donc la variabilité du champ réel — ainsi que la variance/co-variance des observations — donc les erreurs de mesure —.

L'analyse est dite objective car les poids W sont fixés par application d'un critère objectif d'optimalité : W est la matrice qui réalise le minimum de la variance des erreurs $\varepsilon_a = \mathsf{x}_a - \mathsf{x}_r$ où x_r désigne le champ réel.

iv. Le *temps caractéristique intégral* mesure la persistance d'un signal dans le temps en y associant un temps $T^\star$ qui peut être interprété comme l'horizon temporel auquel la valeur observée possède une valeur prédictive.

Le temps caractéristique est défini à partir de la fonction d'auto-covariance normalisée $\rho(\tau)$ par

$$T^\star = \int_0^\infty \rho(\tau) d\tau$$

v. Une *équation différentielle hyperbolique* est une équation du type

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

qui décrit un phénomène de propagation (onde, advection, ...). Une telle équation est normalement complétée par des conditions initiales et des conditions aux limites dont l'équation décrit la propagation à l'intérieur du domaine.