

*Durée de l'épreuve : 3 heures.*

**Question I**

Au moyen d'un dispositif XBT, on mesure la température dans la colonne d'eau avec une résolution spatiale verticale  $\Delta z$  constante.

En utilisant la formule de Taylor, montrez que la dérivée seconde de la température par rapport à la coordonnée verticale  $z$  peut être estimée à partir des mesures effectuées aux profondeurs  $z^*$ ,  $z^* + \Delta z$  et  $z^* - \Delta z$  selon

$$\frac{d^2 T}{dz^2}(z^*) = \frac{T(z^* + \Delta z) - 2T(z^*) + T(z^* - \Delta z)}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2)$$

Si la température est mesurée uniquement aux profondeurs  $z^*$ ,  $z^* + \Delta z$  et  $z^* - 2\Delta z$ , comment peut-on en estimer la dérivée seconde en  $z = z^*$  ?

**Question II**

On considère la dynamique d'une population de larves d'insectes qui sont transportées dans un lac au rythme constant de  $q$  larves par unité de temps et qui sont soumises à la prédation par les petits poissons présents dans le lac. On introduit le modèle dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = q - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = \epsilon \alpha xy - \delta y \end{cases} \quad (\spadesuit)$$

où  $x$  et  $y$  décrivent respectivement les nombres de larves et de petits poissons et où  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon$  et  $\delta$  sont des constantes strictement positives.

- i. Donnez une interprétation de chacun des termes et des constantes du modèle ci-dessus.
- ii. En considérant uniquement la première équation de ( $\spadesuit$ ) où  $y = y_*$  est supposé constant,
  - (a) montrez que le nombre de larves tendra vers un équilibre dépendant de  $q$ , de  $\alpha$  et de  $y_*$ . Déterminez cette population d'équilibre et sa stabilité ;
  - (b) déterminez les dimensions des constantes  $q$ ,  $\alpha$  et  $y_*$  ;
  - (c) déduisez l'expression d'un temps caractéristique de la vitesse à laquelle la population de larves tend vers l'équilibre identifié au point précédent.
- iii. Esquissez le plan de phase correspondant au modèle complet ( $\spadesuit$ ).
- iv. Identifiez les éventuelles configurations d'équilibre du système complet et leur stabilité.

### Question III

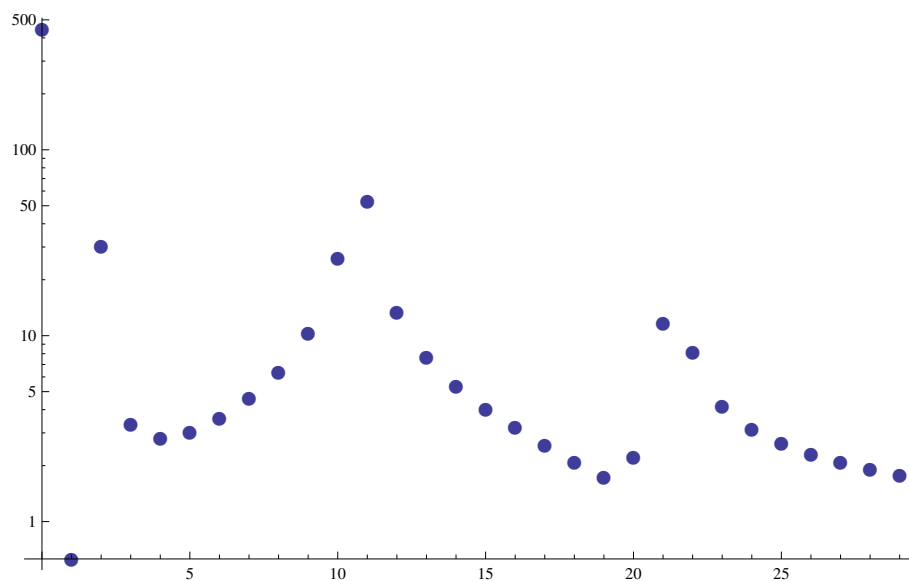
Définissez brièvement, mais aussi complètement que possible, chacun des termes et concepts suivants :

- i. divergence d'un champ vectoriel ;
- ii. interpolation par distance inverse ;
- iii. filtre gaussien ;
- iv. équation différentielle parabolique.

### Question IV

On dispose d'une série temporelle  $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}\}$  de la température ( $^{\circ}\text{C}$ ) obtenue par un système automatique d'acquisition qui enregistre la température à un intervalle  $\Delta t = 15$  minutes. L'enregistrement est constitué de  $N = 2^{10}$  valeurs. Le graphique ci-dessous représente le module des 30 premières composantes de la transformée de Fourier discrète (numéro de l'harmonique en abscisse et module de la composante de Fourier en ordonnée selon une échelle logarithmique) calculée par application de

$$\tilde{t}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} t_j \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} k j \right], \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$



- i. Estimez la température moyenne observée.
- ii. Déterminez l'ordre de grandeur et la période des composantes qui dominent ce signal.
- iii. À quelle(s) modification(s) peut-on s'attendre si on analyse une série temporelle deux fois plus longue mais caractérisée par le même  $\Delta t$  ?

## SOLUTION TYPE

### Question I

La formule de Taylor permet d'écrire

$$\begin{aligned} T(z^* + \Delta z) &= T(z^*) + T'(z^*)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z^*)\Delta z^2 + \frac{1}{3!}T'''(z^*)\Delta z^3 + O(\Delta z^4) \\ T(z^* - \Delta z) &= T(z^*) - T'(z^*)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z^*)\Delta z^2 - \frac{1}{3!}T'''(z^*)\Delta z^3 + O(\Delta z^4) \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Additionnant membre à membre, il vient

$$T(z^* + \Delta z) + T(z^* - \Delta z) = 2T(z^*) + T''(z^*)\Delta z^2 + O(\Delta z^4)$$

et dès lors, comme attendu,

$$T''(z^*) = \frac{T(z^* + \Delta z) - 2T(z^*) + T(z^* - \Delta z)}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2)$$

Si la température est mesurée en  $z^* + \Delta z$  et en  $z^* - 2\Delta z$  alors, tenant compte de

$$T(z^* - 2\Delta z) = T(z^*) - 2T'(z^*)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z^*)(2\Delta z)^2 - \frac{1}{3!}T'''(z^*)(2\Delta z)^3 + O(\Delta z^4) \quad (\ddagger)$$

et combinant  $(\dagger)$  et  $(\ddagger)$ , il vient

$$2T(z^* + \Delta z) + T(z^* - 2\Delta z) = 3T(z^*) + 3T''(z^*)\Delta z^2 - T'''(z^*)\Delta z^3 + O(\Delta z^4)$$

de sorte que

$$T''(z^*) = \frac{2T(z^* + \Delta z) - 3T(z^*) + T(z^* - 2\Delta z)}{3\Delta z^2} + O(\Delta z)$$

### Question II

- i. La première équation indique que le nombre de larves augmente en fonction de l'apport extérieur (flux  $q$ ) et diminue par prédation des poissons sur les larves. Ce taux de prédation est proportionnel à la probabilité de rencontre des larves et des poissons, *i.e.* au produit de leurs nombres respectifs.

La seconde équation indique que la population des petits poissons grandit à la faveur de la prédation sur les larves ; la constante  $\varepsilon$  représente en quelque sorte l'efficacité de transfert d'un niveau de la chaîne alimentaire vers le suivant. Par ailleurs, le terme  $-\delta y$  représente un terme de mortalité des petits poissons ou de prédation par les niveaux trophiques supérieurs.

- ii. Si on considère que la population des petits poissons est constante au niveau  $y_*$ , la dynamique de la population des larves est alors décrite par

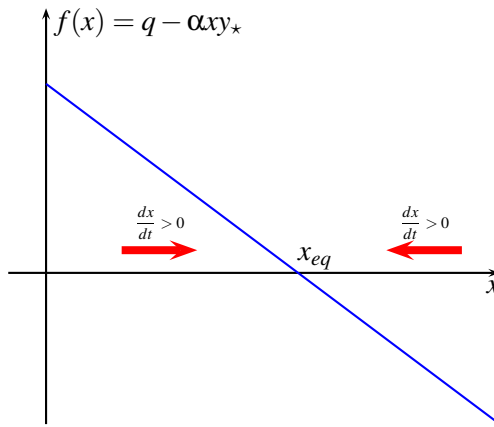
$$\frac{dx}{dt} = q - \alpha xy_* \quad (\spadesuit)$$

- (a) Cette équation admet une configuration d'équilibre correspondant à l'annulation du second membre, *i.e.*

$$q - \alpha x_{eq} y_* = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \frac{q}{\alpha y_*}$$

Le nombre de larves à l'équilibre augmente avec  $q$  et diminue avec l'intensité de la pression de prédation des petits poissons.

On peut étudier graphiquement la stabilité de cet équilibre en représentant la fonction  $f(x) = q - \alpha xy_*$ .



Si  $x < x_{eq}$ , on constate que  $\dot{x} > 0$ , *i.e.* la population de larves tend à augmenter. Inversement, si  $x > x_{eq}$ , on a  $\dot{x} < 0$  et la population diminue pour se rapprocher de la population d'équilibre. Dès lors, l'équilibre est stable.

- (b) La constante  $y_*$  représente un nombre de poissons. Il s'agit donc d'un nombre pur, *i.e.* sans dimensions. Il en est de même du nombre  $x$  des larves. Dès lors,

$$[x] = [y_*] = 1$$

Les dimensions des constantes  $q$  et  $\alpha$  peuvent être déterminées en exprimant que les différents termes de (♠) possèdent les mêmes dimensions. On a

$$[q] = \left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{[x]}{T} = T^{-1}$$

et

$$[\alpha] = \frac{[q]}{[xy_*]} = T^{-1}$$

- (c) La vitesse à laquelle la population de larves retourne vers sa valeur d'équilibre est le temps caractéristique associé au terme de rappel  $-\alpha y_* x$  apparaissant dans (♠), soit  $\alpha$  ou, de façon alternative  $\alpha y_*$ .

On peut également retrouver ce temps caractéristique en résolvant explicitement l'équation (♠). Celle-ci est à variables séparables et conduit à

$$\int \frac{dx}{q - \alpha y_* x} = \int dt + C$$

soit

$$-\frac{1}{\alpha y_*} \ln |q - \alpha y_* x| = t + C$$

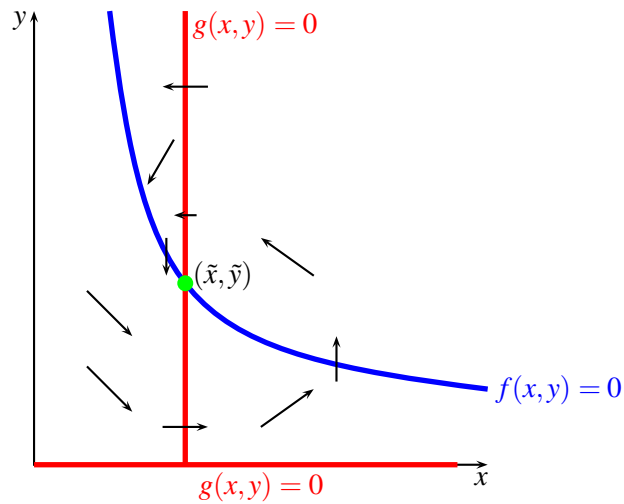
et

$$x(t) = \frac{q}{\alpha y_*} + C' e^{-\alpha y_* t}$$

où  $C$  et  $C'$  sont des constantes d'intégration. Cette expression montre bien que le système évolue vers la configuration d'équilibre avec un temps caractéristique donné par  $1/(\alpha y_*)$ .

- iii) iv) La dynamique du système complet peut être étudiée dans le plan de phase sur base du tracé des nulliclines

$$\begin{cases} f(x, y) \equiv q - \alpha xy = 0 \\ g(x, y) \equiv \epsilon \alpha xy - \delta y = 0 \end{cases}$$

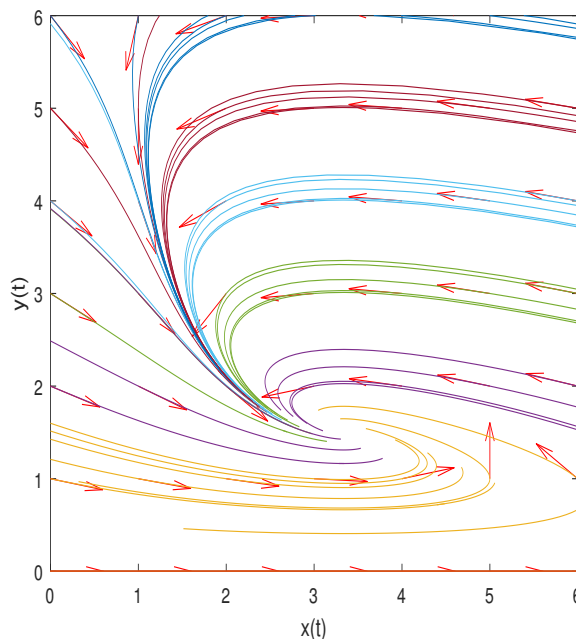


Les nulliclines se coupent en un point unique solution de

$$\begin{cases} q - \alpha \tilde{x} \tilde{y} = 0 \\ \varepsilon \alpha \tilde{x} - \delta = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left( \frac{\delta}{\varepsilon \alpha}, \frac{q \varepsilon}{\delta} \right)$$

qui correspond à la seule configuration d'équilibre du système.

Les courbes définissent par ailleurs 4 régions du plan dans lesquelles les signes de  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  peuvent être aisément identifiés. À partir de cette information, les trajectoires dans le plan de phase peuvent être esquissées.



En prenant en considération les directions définies par  $(\dot{x}, \dot{y})$ , on constate que les lignes de phases s'enroulent autour de  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  et convergent vers ce point qui apparaît donc comme une position d'équilibre stable.

On peut également étudier la stabilité analytiquement. Il suffit pour cela de considérer la matrice de communauté

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y & -\alpha x \\ \varepsilon \alpha y & \varepsilon \alpha x - \delta \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre, on a

$$A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon\alpha q}{\delta} & -\frac{\delta}{\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon^2\alpha q}{\delta} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les solutions de

$$0 = \begin{vmatrix} -\frac{\varepsilon\alpha q}{\delta} - \lambda & -\frac{\delta}{\varepsilon} \\ \frac{\varepsilon^2\alpha q}{\delta} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\varepsilon\alpha q}{\delta}\lambda + \varepsilon\alpha q = 0$$

Sans calculer explicitement les solutions de cette équation, on constate que la somme et le produit des valeurs propres sont donnés respectivement par

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{\varepsilon\alpha q}{\delta}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \varepsilon\alpha q$$

Ceci montre que les deux valeurs propres ont une partie réelle négative. Dès lors, l'équilibre est stable quelles que soient les valeurs des coefficients.

### Question III

Cf. notes de cours.

### Question IV

- i. La température moyenne  $\bar{T}$  est associée à la composition 0 de la transformée de Fourier. Avec les conventions apportées dans le cours, on a

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{t}_0 \approx \frac{420}{\sqrt{2^{10}}} \approx 13.1^\circ\text{C}$$

- ii. Un examen visuel du graphique montre que les composantes  $\hat{t}_2$ ,  $\hat{t}_{11}$  et  $\hat{t}_{21}$  sont les plus importantes. Sachant que la série temporelle couvre  $\tau = 256$  heures ( $2^{10} \times 1/4$  heure), on en déduit que le signal est dominé par les oscillations de périodes et amplitudes données par

Numéro ( $k$ ) de l'harmonique	Période = $\frac{\tau}{k}$	Amplitude = $\frac{2}{\sqrt{N}} \hat{t}_k $
2	128 heures, environ 5.33 jours	$\frac{2 \times 30}{2^5} \approx 1.88^\circ\text{C}$
11	23.3 heures	$\frac{2 \times 52}{2^5} \approx 3.25^\circ\text{C}$
21	11.1 heures	$\frac{2 \times 12}{2^5} \approx 0.75^\circ\text{C}$

- iii. L'augmentation de la longueur de la série temporelle permettra d'identifier des oscillations dont la période est deux fois plus longue que  $\tau$ . Elle permettra surtout d'obtenir une résolution plus fine dans l'espace fréquentiel et donc de pouvoir distinguer plus nettement des composantes dont les périodes réelles sont proches l'une de l'autre. On peut ainsi espérer préciser les périodes qui correspondent aux pics relativement larges observés sur la figure ci-dessus autour des harmoniques 11 et 21.