

Durée maximale de l'épreuve : 4 heures.

L'usage d'un formulaire mathématique est autorisé mais pas la consultation des notes de cours.

Question I

Les variations de la masse volumique de l'eau de mer en fonction de la température absolue T , de la salinité S et de la pression p peuvent être décrites par l'équation d'état

$$\rho = \frac{\rho_*}{1 - (p - p_0)/K}$$

où

$$\rho_* = a_0 + a_1(T - T_0) + (S - S_0)[a_2 + a_3(T - T_0) + a_4(S - S_0)]$$

où les paramètres a_i sont des constantes et où le triplet (p_0, T_0, S_0) caractérise la pression, la température et la salinité dans un état de référence.

- i. Si K est constant, déterminez, en fonction des paramètres a_i , une expression linéaire décrivant de façon approchée les variations de ρ au voisinage de l'état de référence.
- ii. Faites de même si

$$K = b_0 + b_1(T - T_0) + (S - S_0)[b_2 + b_3(T - T_0) + b_4(S - S_0)]$$

où les paramètres b_i sont des constantes.

Question II

On considère le modèle suivant pour des populations $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_1 x(1 - \alpha x - \beta y) \\ \dot{y} = \mu_2 y(1 - \gamma x - \delta y) \end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma$ et δ sont des constantes strictement positives.

- i. Interprétez les différents termes de ce modèle et décrivez le type d'interaction entre les populations décrites par ce modèle.
- ii. Sachant que les grandeurs x et y sont exprimées toutes deux en nombre d'individus par unité de surface, déterminez les dimensions de x , de y , ainsi que des paramètres $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta, \gamma$ et δ .
- iii. Montrez que le modèle peut s'écrire sous la forme adimensionnelle

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{x}(1 - \tilde{x} - \xi\tilde{y}) \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = r\tilde{y}(1 - \eta\tilde{x} - \tilde{y}) \end{cases} \quad (\dagger)$$

où toutes les grandeurs apparaissant dans cette expression sont adimensionnelles avec

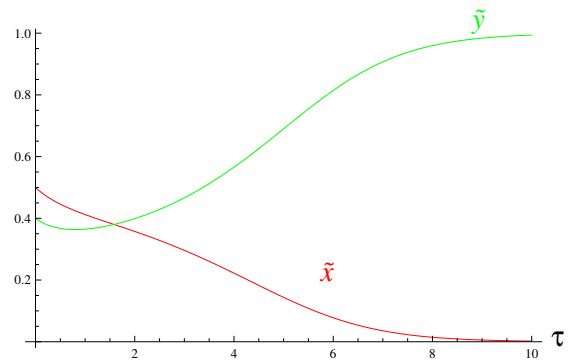
$$\tau = \mu_1 t, \quad \tilde{x} = \alpha x, \quad \tilde{y} = \delta y$$

Déterminez les paramètres r, ξ et η .

- iv. On résout numériquement les équations (†) avec les paramètres $\xi = 2$, $r = 2$ et $\eta = 3/2$ à partir de conditions initiales $\tilde{x}(0) = 0.5$ et $\tilde{y}(0) = 0.4$ et on obtient la solution représentée ci-contre.

Si on répète la simulation avec d'autres conditions initiales, sans changer les valeurs des paramètres ξ , r et η , peut-on s'attendre à des solutions qualitativement différentes ?

Avec les paramètres retenus, le modèle peut-il décrire l'équilibre entre des populations non nulles des deux espèces ?



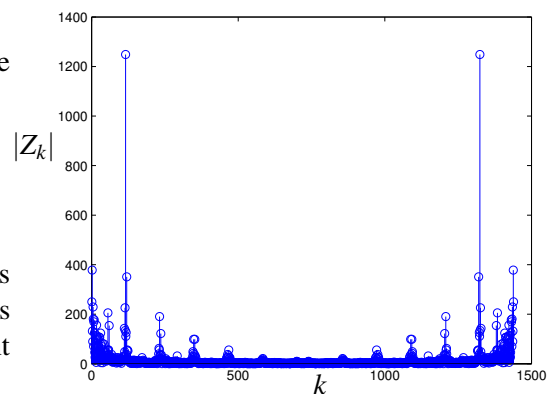
Question III

On dispose d'un enregistrement d'un marégraphe décrivant l'élévation de la mer à Den Helder (NL) avec une observation par heure ($\Delta t = 1$ heure) pendant 60 jours ($N=1440$ données).

- i. On réalise une Transformée de Fourier Discrète telle que

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \exp \left[-\frac{2\pi i}{N} k j \right]$$

où les observations z_j effectuées aux temps $t_j = t_0 + j\Delta t$ sont exprimées en centimètres. Les valeurs de $|Z_k|$ calculées de cette façon sont représentées ci-contre.



Sachant que le signal est dominé par la marée semi-diurne lunaire M_2 , estimez l'amplitude de la marée M_2 (période $T_{M_2} = 44714$ s) à Den Helder. Déterminez l'indice k de la transformée de Fourier Discrète correspondant le mieux à cette composante de marée.

- ii. La série temporelle permet-elle de bien distinguer la composante M_2 de la composante semi-diurne solaire S_2 (période $T_{S_2} = 43200$ s) ? Justifiez.
 iii. Une autre façon d'extraire le signal relatif à M_2 consiste à ajuster les coefficients C_1 et C_2 pour que la fonction

$$z(t) = C_1 \cos \frac{2\pi t}{T_{M_2}} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T_{M_2}}$$

soit la plus proche possible des observations. Montrez comment les coefficients C_1 et C_2 peuvent être estimés de cette façon. Précisez la relation entre les coefficients C_1 et C_2 et l'amplitude du signal de marée.

Question IV

Définissez brièvement les concepts ci-dessous.

- i. Gradient d'une fonction scalaire.
- ii. Filtre gaussien.
- iii. Interpolation par distance inverse.
- iv. Kriging.
- v. Équation hyperbolique.

Question I

La linéarisation d'une fonction de plusieurs variables repose sur l'application de la formule de Taylor à l'ordre 1 selon

$$\rho(T, S, p) \sim \rho(T_0, S_0, p_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_0 (T - T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_0 (S - S_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_0 (p - p_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

où les dérivées partielles sont évaluées dans l'état de référence (T_0, S_0, p_0) .

i. Si

$$\rho(T, S, p) = \frac{\rho_\star}{1 - (p - p_0)/K}$$

où

$$\rho_\star = a_0 + a_1(T - T_0) + (S - S_0)[a_2 + a_3(T - T_0) + a_4(S - S_0)]$$

et où K est une constante, on calcule successivement $\rho(T_0, S_0, p_0) = a_0$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{a_1 + a_3(S - S_0)}{1 - (p - p_0)/K} \\ \frac{\partial \rho}{\partial S} = \frac{a_2 + a_3(T - T_0) + 2a_4(S - S_0)}{1 - (p - p_0)/K} \\ \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho_\star}{K \left(1 - \frac{p - p_0}{K}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_0 = a_1 \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_0 = a_2 \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_0 = \frac{a_0}{K} \end{cases}$$

de sorte que

$$\rho(T, S, p) \sim a_0 + a_1(T - T_0) + a_2(S - S_0) + \frac{a_0}{K}(p - p_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

De façon alternative, on peut aussi écrire

$$\rho_\star \sim a_0 + a_1(T - T_0) + a_2(S - S_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

en négligeant les termes quadratiques et

$$\rho(T, S, p) \sim \rho_\star \left(1 + \frac{p - p_0}{K}\right), \quad p \rightarrow p_0$$

en tenant compte de

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x, \quad x \rightarrow 0$$

Dès lors

$$\begin{aligned} \rho(T, S, p) &\sim \left[a_0 + a_1(T - T_0) + a_2(S - S_0)\right] \left[1 + \frac{p - p_0}{K}\right] \\ &\sim a_0 + a_1(T - T_0) + a_2(S - S_0) + \frac{a_0}{K}(p - p_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0) \end{aligned}$$

ii. Si on tient compte des variations de K selon

$$K = b_0 + b_1(T - T_0) + (S - S_0)[b_2 + b_3(T - T_0) + b_4(S - S_0)]$$

on peut appliquer la formule de Taylor pour obtenir l'expression linéarisée des variations de ρ au voisinage de l'état de référence.

On peut aussi écrire, en négligeant les termes quadratiques en les perturbations par rapport à l'état de référence,

$$K \sim b_0 + b_1(T - T_0) + b_2(S - S_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

et

$$\left[1 - \frac{p - p_0}{K}\right]^{-1} \sim 1 + \frac{p - p_0}{K} \sim 1 + \frac{1}{b_0}(p - p_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

Dès lors, en reprenant l'expression linéarisée de ρ^* ,

$$\rho(T, S, p) \sim a_0 + a_1(T - T_0) + a_2(S - S_0) + \frac{a_0}{b_0}(p - p_0), \quad (T, S, p) \rightarrow (T_0, S_0, p_0)$$

Question II

i. Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_1 x (1 - \alpha x - \beta y) \\ \dot{y} = \mu_2 y (1 - \gamma x - \delta y) \end{cases}$$

décrit l'évolution de deux populations x et y dont la croissance est réglée par une loi logistique (taux de croissances linéaires μ_1 et μ_2 ; capacités portantes $1/\alpha$ et $1/\delta$) mais qui sont en compétition pour une même ressource. Cette compétition se marque par les termes négatifs $-\beta y$ et $-\gamma x$ qui viennent diminuer les taux de croissance de chacune des deux populations lorsque l'autre population est présente.

ii. Les deux populations x et y sont exprimées en nombre d'individus par unité de surface. On a donc

$$[x] = [y] = L^{-2}$$

Tous les termes des deux équations partagent les mêmes dimensions. En particulier,

$$[\dot{x}] = [\dot{y}] = L^{-2}T^{-1} = [\mu_1 x] = [\mu_2 y]$$

dont on déduit

$$[\mu_1] = [\mu_2] = \frac{[\dot{x}]}{[x]} = T^{-1}$$

Par ailleurs, en considérant les parenthèses des membres de droite des deux équations

$$[1] = [\alpha x] = [\beta y] = [\gamma x] = [\delta y]$$

Dès lors

$$[\alpha] = [\beta] = [\gamma] = [\delta] = \frac{1}{[x]} = L^2$$

iii. Introduisons les variables adimensionnelles

$$\tau = \mu_1 t, \quad \tilde{x} = \alpha x, \quad \tilde{y} = \delta y$$

On a

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_1}{\alpha} \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\mu_1}{\delta} \frac{d\tilde{y}}{d\tau}$$

Dès lors, les équations différentielles du système deviennent

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\alpha} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{\mu_1}{\alpha} \tilde{x} \left(1 - \tilde{x} - \frac{\beta}{\delta} \tilde{y}\right) \\ \frac{\mu_1}{\delta} \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \frac{\mu_2}{\delta} \tilde{y} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \tilde{x} - \tilde{y}\right) \end{cases}$$

Après simplification, il vient

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{x}(1 - \tilde{x} - \xi\tilde{y}) \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = r\tilde{y}(1 - \eta\tilde{x} - \tilde{y}) \end{cases}$$

où on a posé

$$r = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \xi = \frac{\beta}{\delta}, \quad \eta = \frac{\gamma}{\alpha}$$

iv. Avec les valeurs des paramètres retenues, le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}(1 - \tilde{x} - 2\tilde{y}) \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\tilde{y}(1 - 1.5\tilde{x} - \tilde{y}) \end{cases}$$

Les éventuelles configurations d'équilibre sont les solutions de

$$\begin{cases} 0 = \tilde{x}(1 - \tilde{x} - 2\tilde{y}) \\ 0 = 2\tilde{y}(1 - 1.5\tilde{x} - \tilde{y}) \end{cases}$$

soit

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1), \quad (1/2, 1/4)$$

La simulation illustre la convergence du système vers la troisième de ces configurations d'équilibre.

La disparition de la première espèce et l'évolution de la seconde espèce vers la capacité portante correspondante n'est pas la seule issue possible pour ce système. Pour s'en convaincre, on peut par exemple étudier la stabilité de la deuxième configuration d'équilibre. La matrice de communauté est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial g}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\tilde{x} - 2\tilde{y} & -2\tilde{x} \\ -3\tilde{y} & 2 - 3\tilde{x} - 4\tilde{y} \end{pmatrix}$$

Au point $(1,0)$, celle-ci devient

$$A(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dont toutes les valeurs propres, soit $\lambda = -1$ de multiplicité deux, sont strictement négatives. On en déduit que la configuration d'équilibre est stable. Certaines conditions initiales, en particulier celles proches de $(1,0)$, peuvent donc conduire à la disparition de la deuxième espèce au profit de la première espèce.

La co-existence entre les deux espèces n'est pas possible. En effet, l'équilibre correspondant à $(1/2, 1/4)$ est instable comme le montre l'examen de la matrice de communauté en ce point. On a en effet

$$A(1/2, 1/4) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La recherche des valeurs propres conduit à

$$\text{dtm}(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -1/2 - \lambda & -1 \\ -3/4 & -1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

L'une des valeurs propres étant positive, l'équilibre est instable et la cohabitation entre les deux espèces n'est pas possible avec les valeurs des paramètres considérées.

Question III

i. Les périodes des différentes harmoniques identifiées par la FFT sont données par

$$T_k = \frac{N\Delta t}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

Tenant compte de la période $T_{M_2} = 44\,714$ s de la marée semi-diurne lunaire M_2 , on calcule

$$\frac{N\Delta t}{T_{M_2}} = \frac{1\,440 \cdot 3\,600}{44\,714} = 115.94$$

Dès lors, la marée M_2 n'est pas représentée par une seule harmonique de l'analyse réalisée ; elle est principalement associée à l'harmonique n° 116 mais contribue également aux harmoniques de numéros voisins.

Sur le graphe, on peut estimer $|Z_{116}| \approx 1250$. Dès lors, l'amplitude de la marée peut être estimée par

$$A_{M_2} \approx \frac{2}{\sqrt{N}} |Z_{116}| \approx \frac{2}{\sqrt{1\,440}} \times 1\,250 \approx 65.9 \text{ cm}$$

ii. La résolution spectrale correspondant à la longueur du signal analysé est

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} = 1.21 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Or la différence entre les pulsations des signaux associés à M_2 et à S_2 est donnée par

$$\frac{2\pi}{T_{S_2}} - \frac{2\pi}{T_{M_2}} = \frac{2\pi}{43\,200} - \frac{2\pi}{44\,714} = 4.92 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Cette différence est supérieure à la résolution spectrale, les deux composantes de marée peuvent être distinguées par l'analyse du signal.

iii. Pour extraire les caractéristiques du signal associé à M_2 , on peut également tenter d'ajuster la fonction

$$z(t) = C_1 \cos \frac{2\pi t}{T_{M_2}} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T_{M_2}}$$

aux observations au sens des moindres carrés.

Les observations z_j étant réalisées aux temps $t_j = t_0 + j\Delta t$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$), il s'agit de minimiser

$$SSE = \sum_{j=0}^{N-1} \left[C_1 \cos \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} + C_2 \sin \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} - z_j \right]^2$$

en ajustant les valeurs des paramètres C_1 et C_2 .

Le minimum de la somme SSE des carrés des erreurs est obtenu si C_1 et C_2 vérifient le système

$$\begin{cases} \frac{\partial SSE}{\partial C_1} = 0 = 2 \sum_{j=0}^{N-1} \left[C_1 \cos \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} + C_2 \sin \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} - z_j \right] \cos \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} \\ \frac{\partial SSE}{\partial C_2} = 0 = 2 \sum_{j=0}^{N-1} \left[C_1 \cos \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} + C_2 \sin \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} - z_j \right] \sin \frac{2\pi t_j}{T_{M_2}} \end{cases}$$

Le signal $z(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$z(t) = A \cos \left(\frac{2\pi t}{T_{M_2}} - \varphi \right) = A \cos \frac{2\pi t}{T_{M_2}} \cos \varphi + A \sin \frac{2\pi t}{T_{M_2}} \sin \varphi$$

ce qui conduit à identifier

$$A \cos \varphi = C_1, \quad A \sin \varphi = C_2$$

L'amplitude du signal est donc liée aux coefficients C_1 et C_2 par la relation

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Question IV

- i. Le gradient ∇f d'une fonction scalaire $f(x)$ de plusieurs variables est le vecteur donné par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathbf{e}_n$$

Ce vecteur pointe dans la direction d'augmentation la plus rapide de la grandeur f . Sa norme est le taux de variation de f dans cette direction.

- ii. Le filtre gaussien remplace un signal brut par une moyenne pondérée des valeurs de celui-ci en des temps différents. Il permet ainsi d'éliminer les fréquences les plus élevées du signal initial, lesquelles correspondent généralement à du bruit indésirable ou non significatif. Par rapport à une simple moyenne glissante, le filtre gaussien présente l'avantage d'un traitement quasiment monotone des harmoniques du signal initial : plus la fréquence est élevée plus l'atténuation est importante.

Dans le cas discret, le signal filtré f_j est donné par

$$f_j = \sum_{k=-N}^N w_k x_{j+k}$$

où x_k désigne le signal brut et w_k ($k = -N, \dots, N$) sont les poids du filtre. Dans le cas d'un filtre gaussien, ceux-ci sont fixés en échantillonnant une distribution gaussienne et en renormalisant les poids pour que

$$\sum_{k=-N}^N w_k = 1$$

- iii. L'interpolation par distance inverse permet de reconstruire une représentation continue d'un champ quelconque à partir d'observations effectuées en des points discrets. Le champ interpolé $z(x, y)$ est obtenu par combinaison linéaire des observations z_i de la forme

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i(x, y) z_i$$

où le poids de l'observation i dans l'estimation du champ au point (x, y) est inversement proportionnel à la distance qui sépare le point (x, y) du point d'observation i , *i.e.*

$$w_i(x, y) = \frac{h_i^{-p}(x, y)}{\sum_{j=1}^N h_j^{-p}(x, y)} \quad \text{où} \quad h_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Ce type d'interpolation permet de construire une représentation continue du champ dont les valeurs sont situées dans l'intervalle de variation des mesures utilisées.

- iv. Le kriging est une méthode d'interpolation de données basée sur l'analyse objective de celles-ci. Comme dans le cas de l'interpolation par distance inverse, le champ reconstruit est obtenu par combinaison linéaire des observations. Les poids sont cependant choisis ici en minimisant la variance des erreurs.

Les observations elles-mêmes sont d'abord utilisées pour construire un semi-variogramme décrivant la corrélation spatiale du champ étudié, *i.e.* le degré de similitude entre les valeurs du champ étudié en deux points différents en fonction de la distance entre ceux-ci. Cette information est alors utilisée pour guider la recherche des poids intervenant dans la combinaison linéaire des observations.

À côté de la reconstruction d'un champ continu, le kriging permet d'obtenir une estimation de l'incertitude sur l'estimation en chaque point.

- v. Une équation différentielle hyperbolique est une équation différentielle qui, comme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

décrit la propagation d'une onde dans un milieu.