Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

OCEA0014-1 MÉTHODES MATHÉMATIQUES D'ANALYSE ET DE MODÉLISATION APPLIQUÉES À L'ENVIRONNEMENT

JANVIER 2011

## Question I

*Dans de nombreux modèles d'écosystèmes, on décrit l'influence de la température sur le taux de croissance du phytoplancton par le biais d'une fonction de limitation de la forme*

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{2(1+\beta)\theta}{\theta^2+2\beta\theta+1} & si \quad \theta > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad où \qquad \theta = \frac{T-T_e}{T_s-T_e}$$

*où $T$ désigne la température absolue, $\beta > 0$ est une constante et $T_e < T_s$ sont des valeurs de référence constantes de la température.*

– *Déterminez le comportement asymptotique de $f$ au voisinage de $T_e$.*
  Si $T \to T_e$, alors $\theta \to 0$ et

$$f(T) = \frac{2(1+\beta)\theta}{\theta^2+2\beta\theta+1} \sim 2(1+\beta)\theta = 2\frac{1+\beta}{T_s-T_e}(T-T_e) \quad \to 0$$

– *Déterminez le comportement asymptotique de $f$ pour $T$ grand.*
  Si $T \to \infty$, alors $\theta \to \infty$ et

$$f(T) = \frac{2(1+\beta)\theta}{\theta^2+2\beta\theta+1} \sim \frac{2(1+\beta)}{\theta} = 2(1+\beta)(T_s-T_e)\frac{1}{T-T_e} \quad \to 0$$

– *Déterminez une approximation linéaire des variations de $f$ valable au voisinage de $\dfrac{T_e+T_s}{2}$.*
  Pour les températures $T$ au voisinage de $T^\star = \dfrac{T_e+T_s}{2}$, on a $\theta \approx \theta^\star$ où

$$\theta^\star = \frac{T^\star - T_e}{T_s - T_e} = \frac{1}{2}$$

  La linéarisation de la fonction de $f$ s'écrit

$$f(\theta) = f(\theta^\star) + \left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^\star}(\theta-\theta^\star) + o(\theta-\theta^\star)$$

  où

$$f(\theta^\star) = \frac{4(1+\beta)}{5+4\beta}$$

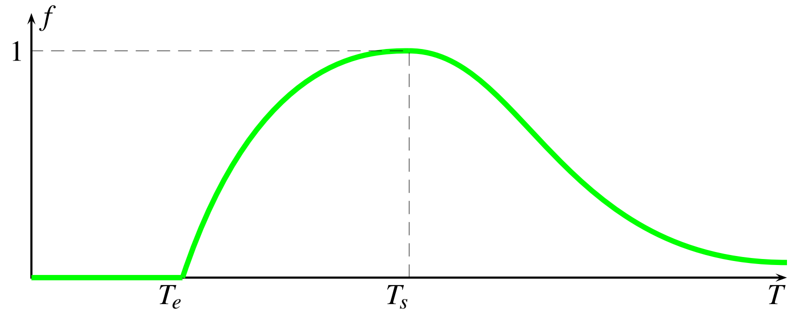
  et

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{2(1+\beta)(1-\theta^2)}{(\theta^2+2\beta\theta+1)^2}, \qquad \left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^\star} = \frac{24(1+\beta)}{(5+4\beta)^2}$$

  de sorte que

$$f(\theta) = \frac{4(1+\beta)}{5+4\beta} + \frac{24(1+\beta)}{(5+4\beta)^2}(\theta-\theta^\star) + o(\theta-\theta^\star) \qquad où \qquad \theta = \frac{T-T_e}{T_s-T_e}$$

– *Esquissez le graphe de $f$ en discutant s'il y a lieu en fonction de $\beta$.*
  L'expression de la dérivée obtenue au point précédent montre que la fonction $f$ est croissante ($f' > 0$) pour $\theta < 1$ et décroissante ($f' < 0$) pour $\theta > 1$. En $\theta = 1$, soit pour $T = T_s$, la dérivée s'annule et la fonction présente un maximum local dont la valeur est 1.
  Si on tient compte de l'annulation de $f$ en $\theta = 0$, soit $T = T_e$, et de sa décroissance vers 0 pour $\theta \to \infty$, le graphe de $f$ peut être esquissé comme ci-dessous, quelle que soit la valeur de $\beta$ :




Question II

*Dans la théorie de la turbulence, la longueur de Kolmogorov $L_K$ caractérise la dimension des tourbillons pour lesquels la dissipation visqueuse est significative. De par sa nature même, cette longueur est une fonction de la viscosité cinématique $\nu$ et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\varepsilon$.*

*On sait que l'énergie cinétique turbulente par unité de masse $k$ (= $0.5 < \|\mathbf{v}'\|^2 >$ où $\mathbf{v}'$ désigne les fluctuations turbulentes de la vitesse et où $< \cdot >$ désigne l'opérateur de moyenne d'ensemble) obéit à l'équation*

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla k = \tilde{\nu} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\|^2 - \tilde{\lambda} \frac{\partial b}{\partial z} - \varepsilon$$

*où $\mathbf{v}$ désigne la vitesse, $b$ est la poussée, $t$ est le temps, $z$ désigne la coordonnée verticale et où $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\lambda}$ sont des coefficients de diffusion turbulente tels que $[\tilde{\nu}] = [\tilde{\lambda}] = [\nu]$.*

i. *Déterminez les dimensions de $L_K$, $k$, $\varepsilon$ et $\nu$.*

- $L_K$ étant une longueur, on a $[L_K] = L$.
- En utilisant la définition de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse, il vient

$$[k] = [0.5 < \|\mathbf{v}'\|^2 >] = (LT^{-1})^2 = L^2T^{-2}$$

- De l'équation différentielle proposée, on déduit

$$[\varepsilon] = \left[\frac{\partial k}{\partial t}\right] = \frac{[k]}{[t]} = L^2T^{-3}$$

- De même, puisque

$$\left[\tilde{\nu} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\|^2\right] = [\varepsilon]$$

  il vient

$$[\nu] = [\tilde{\nu}] = \frac{[\varepsilon]}{\left[\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\|^2\right]} = \frac{L^2T^{-3}}{(LT^{-1}/L)^2} = L^2T^{-1}$$

ii. *Déterminez la combinaison des paramètres $\varepsilon$ et $\nu$ permettant de définir, à une constante multiplicative près, la longueur de Kolmogorov.*

Cherchons les exposants $\alpha$ et $\beta$ tels que le produit $\varepsilon^\alpha \nu^\beta$ possède les dimensions d'une longueur, *i.e.*

$$L = [\varepsilon^\alpha \nu^\beta] = (L^2T^{-3})^\alpha (L^2T^{-1})^\beta = L^{2\alpha+2\beta}\, T^{-3\alpha-\beta}$$

Pour que l'égalité soit vérifiée, il faut que

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + 2\beta \\ 0 = -3\alpha - \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1/4 \\ \beta = 3/4 \end{cases}$$

La longueur de Kolmogorov est donc définie à une constante multiplicative près par

$$L_K \propto \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}$$

Question III

*On observe l'évolution temporelle de la concentration [C] d'une espèce chimique dont on croit qu'elle apparaît à la faveur d'une réaction binaire du type $A+B \to 2C$ impliquant des espèces $A$ et $B$.*

i. *Écrivez les équations différentielles décrivant l'évolution des concentrations de $A$, $B$ et $C$.*

Par application de la loi d'action des masses de Guldberg et Waage, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k[A][B] \\ \dfrac{d[B]}{dt} = -k[A][B] \\ \dfrac{d[C]}{dt} = +2k[A][B] \end{cases}$$

où $k$ désigne la constante de réaction.

ii. *Précisez les relations existant à chaque instant entre les concentrations des différentes espèces si on ignore toute autre réaction chimique dans le milieu.*

Par différence entre les deux premières équations, on a

$$\frac{d[A]}{dt} - \frac{d[B]}{dt} = 0 \qquad \text{de sorte que} \qquad [A]-[B] = \mathrm{C}^{te}$$

De même, en combinant la première et la troisième équations, on peut écrire

$$2\frac{d[A]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} = 0 \qquad \text{de sorte que} \qquad 2[A]+[C] = \mathrm{C}^{te}$$

Une troisième relation, $2[B]+[C] = \mathrm{C}^{te}$ peut être établie de la même façon mais est une simple combinaison linéaire des relations déjà écrites.

iii. *Déterminez complètement la loi d'évolution de $[C]$ si la concentration de cette espèce est initialement nulle.*

Posant $[A]-[B] = \mathrm{C}^{te} = \alpha$, on peut exprimer $[B]$ en fonction de $[A]$ sous la forme $[B] = [A]-\alpha$ et utiliser cette relation pour éliminer $[B]$ de la première équation qui devient

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]([A]-\alpha)$$

Cette équation est à variables séparables. Sa solution peut être obtenue en considérant

$$\int \frac{\alpha}{[A]([A]-\alpha)} d[A] = -\int \alpha k dt + \beta = -\alpha k t + \beta$$

où $\beta$ est une constante d'intégration. La primitive apparaissant dans le membre de droite peut être calculée comme suit

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha}{[A]([A]-\alpha)} d[A] &= \int \frac{(\alpha-[A])+[A]}{[A]([A]-\alpha)}\, d[A] \\ &= -\int \frac{d[A]}{[A]} + \int \frac{d[A]}{[A]-\alpha} \\ &= -\ln[A] + \ln([A]-\alpha) = \ln\frac{[A]-\alpha}{[A]} \end{aligned}$$

Dès lors

$$\frac{[A]-\alpha}{[A]} = \mathrm{e}^{-\alpha k t+\beta} = \gamma \mathrm{e}^{-\alpha k t}$$

où $\gamma$ est une nouvelle constante d'intégration, remplaçant $\beta$. On en déduit

$$[A](t) = \frac{\alpha}{1-\gamma \mathrm{e}^{-\alpha k t}} \tag{†}$$

Puisque la combinaison $2[A]+[C]$ est constante (Cf. ii.) et que la concentration initiale de $C$ est nulle, il vient

$$2[A](t)+[C](t) = 2[A](0)+C[0] = 2[A](0)$$

et dès lors, en calculant $A[0]$ à partir de (†),

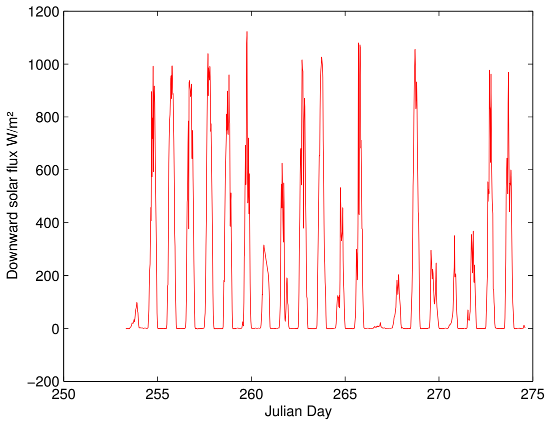
$$[C](t) = 2A[0]-2A[t] = \frac{2\alpha}{1-\gamma} - \frac{2\alpha}{1-\gamma e^{-\alpha k t}}$$

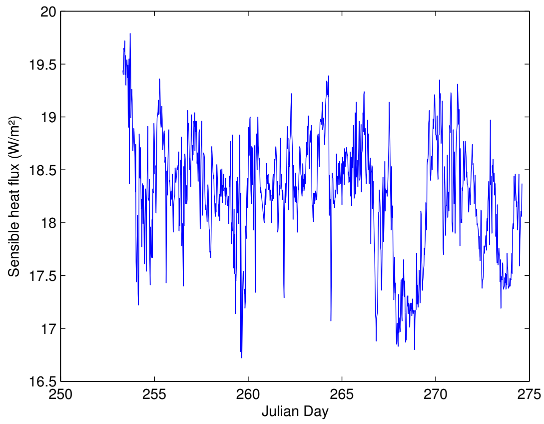
iv. *Si on dispose de mesures de la concentration $[C]$ en fonction du temps mais que l'on ignore les valeurs des concentrations initiales de A et de B, peut-on utiliser les outils de la régression linéaire pour estimer qualitativement la valeur du(des) paramètre(s) apparaissant dans les équations écrites en i. ? Comment ?*

Outre la constante de réaction que l'on souhaite déterminer, les constantes $\alpha$ et $\gamma$ sont inconnues puisque les concentrations initiales de A et B ne sont pas connues. L'expression de [C] obtenue ci-dessus fait donc apparaître trois coefficients inconnus alors que la régression linéaire ne peut permettre d'identifier que les deux coefficients d'une droite hypothétique. Il n'est donc pas possible d'identifier séparément les trois paramètres.

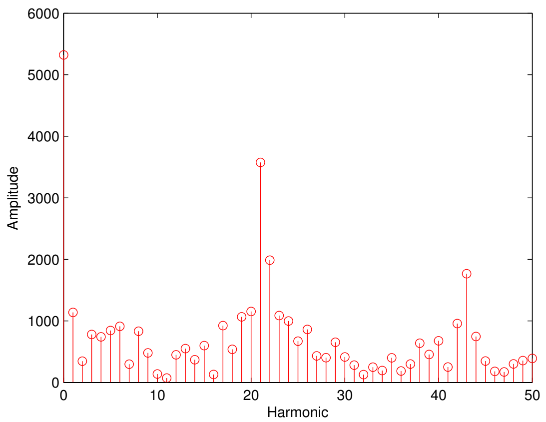
## Question IV

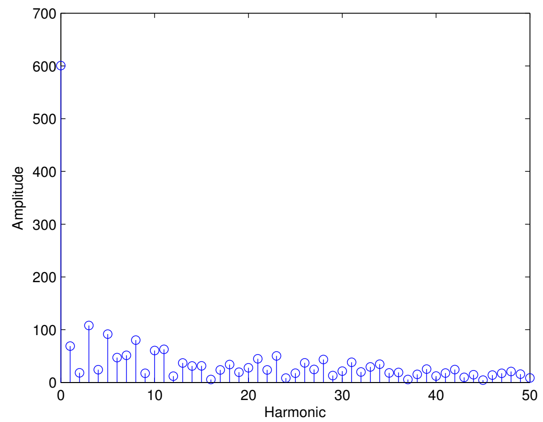
*Les graphes ci-dessous présentent le flux solaire incident (en rouge, $W/m^2$) et le flux de chaleur sensible (en bleu, $W/m^2$) extraits des bases de données de la NOAA contenant les résultats bruts et dérivés de la croisière EPIC2001 de septembre 2001. Ces séries temporelles sont constituées de 1024 données échantillonnées avec une résolution temporelle de 30 minutes.*

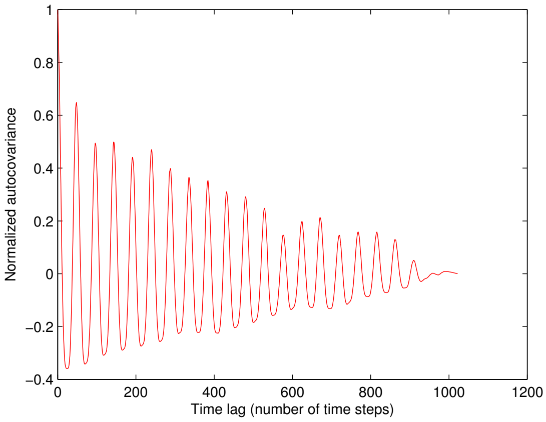


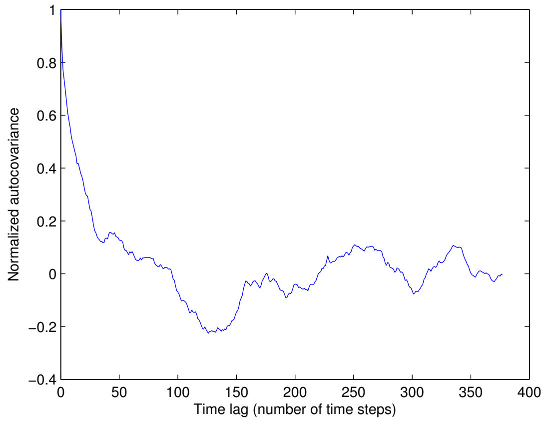




*Afin d'analyser ces données, on calcule la transformée de Fourier discrète et la fonction d'autocovariance normalisée. Celles-ci sont représentées ci-dessous.*






i. *Estimez les valeurs moyennes des deux grandeurs observées. Ces valeurs peuvent-elles être estimées à partir de la transformée de Fourier discrète et/ou de l'autocovariance normalisée ?*

En observant les séries temporelles, on peut estimer grossièrement la moyenne du flux solaire incident à environ 200 $W/m^2$ et le flux de chaleur sensible à 18.5 $W/m^2$.

Ces estimations peuvent être précisées à partir de l'amplitude de l'harmonique n° 0 de la transformée de Fourier. En effet, la moyenne $\bar{x}$ des données est égale à $X_0/\sqrt{N}$ où $N = 1024$.

Pour le flux solaire incident, on trouve $5300/\sqrt{1024} \approx 165\ W/m^2$.

De même, pour le flux de chaleur sensible, on trouve $600/\sqrt{1024} \approx 18.75 W/m^2$.

L'autocovariance normalisée n'a aucun rapport avec la moyenne.

ii. *Interprétez/justifiez les graphes de la transformée de Fourier discrète et de l'autocovariance normalisée présentés ci-dessus. Que signifient ces résultats ? Que peut-on dire de la périodicité éventuelle des signaux et de leur persistance. En particulier, estimez le temps caractéristique intégral du flux de chaleur sensible et donnez l'interprétation physique de cette valeur.*

La transformée de Fourier discrète et la fonction d'autocovariance témoignent de la périodicité marquée du signal du flux solaire incident. On remarque un pic dans le spectre de Fourier correspondant aux harmoniques n° 21 et 22, soit à une période entre

$$T_{21} = \frac{N\Delta t}{21} = \frac{1024 \times 0.5}{21} = 24.4\text{heures}$$

et

$$T_{22} = \frac{N\Delta t}{22} = \frac{1024 \times 0.5}{22} = 23.8\text{heures}$$

La période réelle (imparfaitement captée par l'analyse) est évidemment de 24 heures et correspond à l'alternance jour/nuit. Cette périodicité jour/nuit domine le signal.

La même information se retrouve sur le diagramme de l'autocovariance qui présente des maxima périodiques (d'amplitudes décroissantes) dont ont peut estimer la période à 48 pas de temps $\Delta t$ de 30 minutes, soit 24 heures.

La décroissance des pics successifs de l'autocovariance témoigne du fait que le signal du flux solaire incident n'est pas strictement périodique ; les valeurs observées changent jour après jours.

En ce qui concerne la série temporelle du flux de chaleur sensible, le seul pic apparaissant dans le spectre de Fourier est celui associé à la valeur moyenne (harmonique 0), ce qui montre l'absence de périodicité dans ce signal qui apparaît comme essentiellement aléatoire.

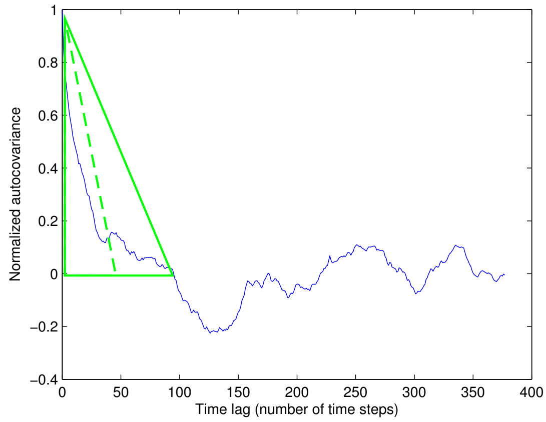
L'autocovariance normalisée témoigne de la persistance du signal, *i.e.* de l'échelle de temps caractérisant les variations temporelles de cette variable. Le premier zéro de l'autocovariance, pour un décalage temporel d'environ $95\Delta t \approx 2$ jours nous donne une première estimation chiffrée de cette persistance ; les valeurs du flux de chaleur sensible séparées de 2 jours (ou plus) ne sont pas corrélées.

Une estimation plus précise de cette persistance est fournie par le temps caractéristique intégral $\mathcal{T}$. En adoptant la définition

$$\mathcal{T} = \int_0^{t_0} \rho(t)dt$$

où $\rho$ désigne la fonction d'autocovariance normalisée et $t_0$ correspond au premier zéro de $\rho(t)$, soit 2 jours, on a peut estimer $\mathcal{T}$ à partir du graphique de $\rho(t)$ puisque $\mathcal{T}$ représente l'aire de la zone sous-tendue par le graphe de $\rho$ entre l'origine et l'abscisse $t_0$. Si on approche les variations de $\rho$ dans cet intervalle par une droite, l'intégrale définissant $\mathcal{T}$ correspond à l'aire du triangle de sommets (0,0)(0,1)($t_0$,0) (Trait continu sur le dessin ci-dessous) et

$$\mathcal{T} \approx \frac{1}{2} \times 1 \times t_0 \approx 1 \text{ jour}$$




Ceci constitue une estimation par excès puisque l'approximation linéaire de ρ est elle-même une approximation par excès. Une valeur de 12 heures semble plus proche de la réalité.