

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.

Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom.

Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Par application de la forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement, établissez l'expression des forces agissant sur un obstacle plongé dans un écoulement.

Question II

Introduisez le problème général de la fermeture turbulente.

Montrez comment celle-ci peut être réalisée selon le modèle de Boussinesq-Prandtl.

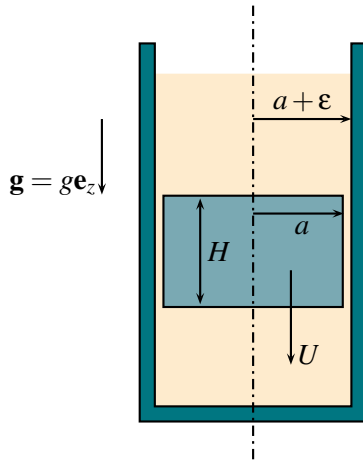
Question III

À partir de la forme générale des équations de Navier-Stokes et des hypothèses adéquates, dérivez les équations décrivant la dynamique des fluides géophysiques à grande échelle.

Question IV

Une méthode possible de mesure de la viscosité dynamique μ d'un liquide consiste à déterminer la vitesse de chute d'un cylindre pesant de rayon a dans un tube de rayon $a + \varepsilon$ contenant le liquide. On se propose de déterminer la dynamique du système lorsque le cylindre a atteint sa vitesse limite de chute U .

On supposera que $\varepsilon \ll a$, que le fluide est de masse volumique constante ρ , que l'écoulement entre le cylindre et le tube est complètement développé et que le fluide est pratiquement au repos au-dessus et en-dessous du cylindre. On note ρ_0 la masse volumique du cylindre et \mathbf{e}_z le vecteur unitaire selon la verticale descendante.



- i. Montrez que le gradient de pression dans l'espace entre le cylindre et le tube peut s'écrire sous la forme

$$\nabla p = (K + \rho g)\mathbf{e}_z$$

où K désigne une constante.

- ii. Déterminez la distribution de la vitesse du fluide dans l'espace entre le cylindre et le tube en fonction des paramètres K , μ , a et ε et de la coordonnée radiale r .

- iii. Par un bilan de masse, montrez que

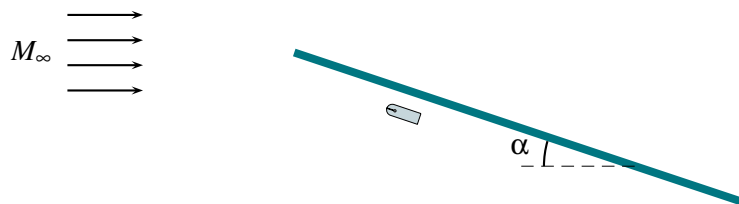
$$K \sim \frac{6a\mu U}{\varepsilon^3} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

- iv. Montrez que la résultante des tensions visqueuses exercées par le fluide sur le cylindre est donnée par

$$\mathbf{F}_\mu \sim -\frac{6\pi a^2 H \mu U}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_z \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Question V

On considère l'écoulement de l'air autour d'un plan portant de corde c et de largeur ℓ (mesurée dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement) présentant un angle d'incidence $\alpha = 5^\circ$ par rapport à un écoulement supersonique avec $M_\infty = 3$, $p_\infty = 0.1$ atm et $T_\infty = 180$ K.



- Sans faire aucun calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du plan en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach, de la pression et de la température.
- Calculez la distribution de pression sur l'intrados et sur l'extrados.
- Déterminez les coefficients de lift et de drag.
- Déterminez la valeur de la pression mesurée par un tube de Pitot placé sur l'intrados.
- Comparez les estimations de la pression dans le sillage du plan portant obtenues en utilisant la théorie exacte des chocs et l'approximation isentropique.

Si vous devez lire des informations dans les tables, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

SOLUTION TYPE

Question I

Cf. support du cours théorique.

Question II

Cf. support du cours théorique.

Question III

Cf. support du cours théorique.

Question IV

Lorsque $\varepsilon \ll a$, l'écoulement peut être calculé en utilisant les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes. Dans ce système, l'axe radial \mathbf{e}_r est assimilé à \mathbf{e}_x , le vecteur \mathbf{e}_θ est assimilé à \mathbf{e}_y (\mathbf{e}_z restant vertical vers le bas).

Les hypothèses suivantes peuvent être posées.

- Le régime est établi et les variables sont indépendantes du temps.
- La symétrie du problème impose que les champs de vitesse et de pression soient indépendants de θ . Avec l'approximation cartésienne utilisée, cette hypothèse conduit à considérer que les champs sont indépendants de la coordonnée y .
- Vu le mouvement vertical (selon z), on peut faire l'hypothèse d'un écoulement plan, on en déduit que la vitesse v perpendiculaire au plan est nulle.
- Le régime est complètement développé entre le cylindre et le tube, la vitesse est donc indépendante de z .

En fonction de ces hypothèses, le champ de vitesse dans l'espace entre le cylindre pesant et le tube peut être exprimé sous la forme

$$\mathbf{u}(x) = u(x)\mathbf{e}_x + w(x)\mathbf{e}_z$$

En injectant cette expression de la vitesse dans l'équation de continuité, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = C$$

La constante C est déterminée en imposant les conditions d'imperméabilité du cylindre et du tube, dans la direction axiale

$$u(a) = u(a + \varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \Rightarrow u = 0$$

L'écoulement est donc unidirectionnel selon \mathbf{e}_z et fonction de x , *i.e.* de la forme $\mathbf{u} = w(x)\mathbf{e}_z$.

Les composantes selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y de l'équation de quantité de mouvement se réduisent à

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

La pression est donc indépendante de x et y : $p = p(z)$.

- i. Montrez que le gradient de pression dans l'espace entre le cylindre et le tube peut s'écrire $\nabla p = (K + \rho g)\mathbf{e}_z$ où K désigne une constante..

Injectant l'expression de la vitesse dans la composante selon \mathbf{e}_z de l'équation de quantité de mouvement, on obtient

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

soit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Vu $p = p(z)$, le membre de gauche n'est fonction que de z . Or, le membre de droite n'est fonction que de x puisque $w = w(x)$. La seule possibilité est que cette expression soit égale à une constante.

Par ailleurs, puisque $\partial_x p = \partial_y p = 0$, le gradient de pression n'a qu'une composante constante selon \mathbf{e}_z et peut s'écrire sous la forme

$$\nabla p = (K + \rho g)\mathbf{e}_z$$

- ii. Déterminez la distribution de la vitesse du fluide dans l'espace entre le cylindre et le tube en fonction des paramètres K , μ , a et ε et de la coordonnée radiale r .

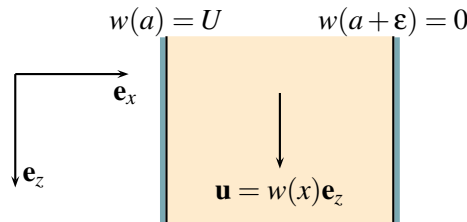
En tenant compte de i., la composante selon \mathbf{e}_z de l'équation de bilan de quantité de mouvement peut s'écrire,

$$K = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{avec } x \in [a, a + \varepsilon]$$

En intégrant deux fois,

$$w(x) = \frac{Kx^2}{2\mu} + Ax + B$$

Les constantes A et B sont déterminées en tenant compte des conditions aux limites à la surface du cylindre et du tube, *i.e.*



On obtient

$$A = -\frac{U}{\varepsilon} - \frac{K}{\mu} \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{et} \quad B = U - \frac{Ka^2}{2\mu} + \frac{Ua}{\varepsilon} + \frac{Ka}{\mu} \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

La distribution de vitesse entre le cylindre et le tube est donc (x correspondant à r),

$$w(x) = (a - x + \varepsilon) \left[(a - x) \frac{K}{2\mu} + \frac{U}{\varepsilon} \right]$$

- iii. Par un bilan de masse, montrez que $K \sim \frac{6a\mu U}{\varepsilon^3}$

Par continuité, le volume fluide déplacé par le cylindre dans sa chute doit être égal au débit s'écoulant vers le haut entre le cylindre pesant et le tube extérieur. Dès lors,

$$\pi a^2 U = - \int_{A_\varepsilon} w dA_\varepsilon$$

où A_ε désigne l'espace annulaire compris entre le cylindre et le tube.

L'intégrale apparaissant dans le membre de droite s'écrit sous la forme

$$- \int_{A_\varepsilon} w dA_\varepsilon = - \int_0^{2\pi} \int_a^{a+\varepsilon} w(r) r dr = -2\pi \int_a^{a+\varepsilon} w(x) x dx$$

En insérant l'expression de $w(x)$ calculée au point précédent, on calcule

$$\pi a^2 U = - \frac{\pi \varepsilon}{12} \left[4U(3a + \varepsilon) - \frac{K\varepsilon^2(2a + \varepsilon)}{\mu} \right]$$

dont on déduit que

$$K = \frac{4(3a^2U + 3aU\varepsilon + U\varepsilon^2)\mu}{\varepsilon^3(2a + \varepsilon)} \sim \frac{6\mu Ua}{\varepsilon^3} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

iv. Montrez que la résultante des tensions visqueuses exercées par le fluide sur le cylindre est donnée par

$$\mathbf{F}_\mu \sim -\frac{6\pi a^2 H \mu U}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_z \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

L'écoulement étant uniquement vertical, les tensions visqueuses exercées par le fluide sur le cylindre sont décrites par τ_{xz} . Leur résultant est donnée par

$$\mathbf{F}_\mu^{f \rightarrow c} = -\mathbf{F}_\mu^{c \rightarrow f} = -2\pi a H \tau_{xz} (-\mathbf{e}_z) \quad \text{où } \tau_{xz} = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a}$$

En effet, la normale à la facette fluide est orientée selon $-\mathbf{e}_x$, les contraintes visqueuses du cylindre sur la facette fluide s'écrivent donc $\tau_{xz}(-\mathbf{e}_z)$. On obtient donc

$$\mathbf{F}_\mu = 2\pi a H \mu \left(-\frac{U}{\varepsilon} - \frac{K\varepsilon}{2\mu} \right) \mathbf{e}_z$$

En insérant l'expression de K calculée au point précédent, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mu &\sim -\frac{2\pi a H \mu U}{\varepsilon} \mathbf{e}_z - \frac{6\pi a^2 H \mu U}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_z \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \\ &\sim -\frac{6\pi a^2 H \mu U}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

v. Déterminez la relation entre la viscosité μ et la vitesse de chute U .

La vitesse limite de chute U étant constante, l'accélération du cylindre est nulle et par conséquent la résultante des forces appliquées sur ce dernier, composée du poids du cylindre, de la résultante des forces de pression agissant sur les faces supérieures et inférieures et de la résultante des contraintes visqueuses, l'est aussi.

$$\sum F_z = P_{cyl} + F_p + F_\mu = \rho_0 \pi a^2 H g - \pi a^2 (K + \rho g) H + F_\mu = 0$$

En injectant les expressions de K et de F_μ dans cette relation, il vient

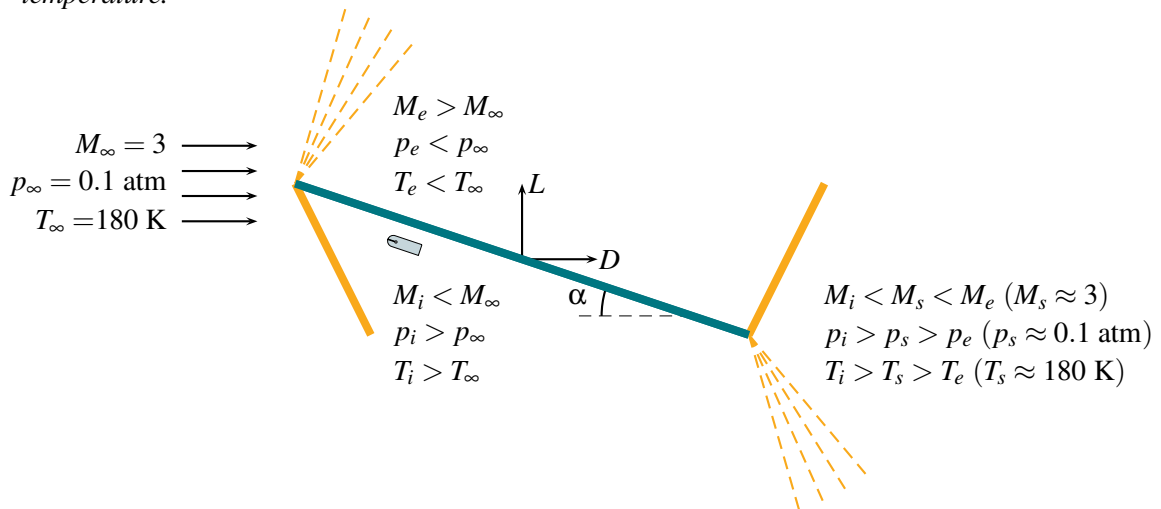
$$(\rho_0 - \rho) \pi a^2 H g \sim \pi a^2 H \frac{6\mu U a}{\varepsilon^3} + \frac{6\pi a^2 H \mu U}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

soit

$$U = \frac{(\rho_0 - \rho) g \varepsilon^3}{6\mu} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Question V

- i. Sans faire aucun calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du plan en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach, de la pression et de la température.



- **Extrados** : Sur la partie supérieure de l'aile, l'écoulement change de direction avec un $\delta = -\alpha < 0$ et une détente se produit. Lors d'une détente isentropique, le Mach augmente ($M_e > M_\infty$), la pression et la température diminuent ($p_e < p_\infty$ et $T_e < T_\infty$). La pression plus faible induit l'effet de succion nécessaire à la portance.
- **Intrados** : Sur la partie inférieure de l'aile, l'écoulement change de direction avec un $\delta = \alpha > 0$ et choc oblique se produit. Lors d'un choc, le Mach diminue ($M_i < M_\infty$), la pression et la température augmentent ($p_i > p_\infty$ et $T_i > T_\infty$). La pression plus grande pousse l'aile vers le haut, nécessaire à la portance.
- **Sillage** : A la sortie, l'écoulement sur l'extrados est soumis à un choc oblique ($\delta = \alpha > 0$) et celui sur l'intrados à une détente ($\delta = -\alpha < 0$). Ces deux écoulements se rejoignent dans la même zone pour n'en former qu'un, que l'on suppose proche des conditions d'entrée $M_\infty, p_\infty, T_\infty$ (la théorie isentropique donnerait exactement $M_s = M_\infty$ mais le choc oblique, s'il est supposé faible, n'est néanmoins pas isentropique.).

- ii. Calculez la distribution de pression sur l'intrados et sur l'extrados.

Sur l'extrados, une détente isentropique se produit, de déflexion $\delta = -\alpha = -5$. Le Mach M_e se déduit de l'équation de Prandtl-Meyer. Les valeurs de v sont calculées à partir des tables, arrondies à la valeur la plus proche.

$$v(M_\infty) - v(M_e) = \delta \Rightarrow v(M_e) = 54.757 \Rightarrow M_e = 3.27$$

La détente étant isentropique, la pression totale est conservée $p_{t_e} = p_{t_\infty}$. Les rapports de pression p_e/p_{t_e} et p_∞/p_{t_∞} viennent des tables à M_e et M_∞

$$p_e = \frac{p_e}{p_{t_e}} \frac{p_{t_e}}{p_{t_\infty}} \frac{p_{t_\infty}}{p_\infty} p_\infty = 0.06708 \text{ atm}$$

Sur l'intrados, un choc oblique se produit. Le graphique $\theta - \delta - M$ est utilisé pour calculer θ avec $\delta = \alpha = 5$ et $M = M_\infty = 3$. On trouve $\theta = 23^\circ$. On décompose l'écoulement amont en ses composantes normales et tangentielles,

$$M_{\infty,n} = M_\infty \sin \theta = 1.1720, \quad M_{\infty,t} = M_\infty \cos \theta = 2.7615$$

La table des chocs normaux pour $M_{\infty,n} = 1.17$ donne ($\infty \rightarrow 1, i \rightarrow 2$),

$$M_{i,n} = 0.8615, \quad \frac{p_i}{p_\infty} = 1.43 \Rightarrow p_i = 0.143 \text{ atm}, \quad \frac{T_i}{T_\infty} = 1.109$$

Grâce au rapport de températures, on déduit le Mach tangentiel et le Mach résultant sur l'intrados,

$$M_{i,t} = M_{\infty,t} \sqrt{\frac{T_{\infty}}{T_i}} = 2.62 \quad \Rightarrow \quad M_i = \sqrt{M_{i,n}^2 + M_{i,t}^2} = 2.75$$

En utilisant la théorie des chocs faibles, les pressions peuvent être calculées par,

$$p_e = p_{\infty} - p_{\infty} \frac{\gamma M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = 0.0611 \text{ atm}, \quad p_i = p_{\infty} + p_{\infty} \frac{\gamma M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = 0.1389 \text{ atm}$$

iii. *Déterminez les coefficients de lift et de drag.*

Vu l'orientation α , les forces de lift et de drag se calculent grâce à la différence de pression intrados-extrados,

$$L = (p_i - p_e) c \ell \cos \alpha, \quad D = (p_i - p_e) c \ell \sin \alpha$$

On en déduit les coefficients (2D) de lift c_l et de drag c_d ,

$$c_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S}, \quad c_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S}$$

Avec ρ_{∞} déduit de la loi des gaz parfaits, U_{∞} de la définition du nombre de Mach et $S = c \ell$

$$\rho_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{RT_{\infty}} = \frac{0.1 \cdot 101325 \text{ [Pa/atm]}}{287 \cdot 180} = 0.196 \text{ kg/m}^3, \quad U_{\infty} = M_{\infty} \sqrt{\gamma RT_{\infty}} = 807 \text{ m/s}$$

$$c_l = 0.12, \quad c_d = 0.0105$$

En utilisant l'approximation des chocs faibles (théorie d'Ackeret), les coefficients peuvent être calculés par,

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = 0.1234, \quad c_d = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = 0.0108$$

iv. *Déterminez la valeur de la pression mesurée par un tube de Pitot placé sur l'intrados.*

L'écoulement sur l'intrados étant supersonique, un choc droit se produit juste devant le tube de Pitot placé dans l'écoulement. La pression qui est mesurée par le tube de Pitot est donc la pression totale p_{t_2} après le choc lorsque celui-ci intervient dans un écoulement avec $M_i = 2.75$ et $p_1 = p_{t_1} = 0.143 \text{ atm}$. Utilisant les tables pour déterminer la valeur du rapport $p_1/p_{t_2} = 0.09792$, il vient

$$p_{\text{pitot}} = p_{t_2} = \frac{p_{t_1}}{0.09792} = 1.46 \text{ atm}$$

v. *Comparez les estimations de la pression dans le sillage du plan portant obtenue en utilisant la théorie exacte des chocs et l'approximation isentropique.*

- Théorie exacte des chocs

La pression dans le sillage peut être calculée en considérant l'écoulement sur l'intrados (précédé par le choc oblique précédemment calculé), suivi d'une détente isentropique dans le changement de direction vers le sillage ($\delta = -5^\circ$),

$$v(M_i) - v(M_s) = \delta \quad \Rightarrow \quad v(M_s) = 49.6 \quad \Rightarrow \quad M_s = 2.99 \approx 3$$

La détente isentropique entre l'intrados et le sillage conserve la pression totale $p_{t_s} = p_{t_i}$. La pression dans le sillage vaut

$$p_s = \frac{p_s}{p_{t_s}} \frac{p_{t_i}}{p_i} p_i = 0.097 \approx 0.1 \text{ atm}$$

La pression peut être aussi calculée avec l'écoulement venant de l'extrados. Il subit un choc oblique en arrivant dans le sillage ($\delta = 5^\circ$). Le graphe $\theta - \delta$ avec $M_e = 3.27$ donne $\theta = 21.5^\circ$. Les projections normale et tangentielle sont

$$M_{e,n} = M_e \sin \theta = 1.19, \quad M_{e,t} = M_e \cos \theta = 3.04$$

La table des chocs normaux pour $M_{e,n} = 1.19$ donne ($e \rightarrow 1, s \rightarrow 2$),

$$M_{s,n} = 0.8485, \quad \frac{T_s}{T_e} = 1.122, \quad p_s = \frac{p_s}{p_e} p_e = 0.099 \approx 0.1 \text{ atm}$$

Les Mach tangentiel et résultant sont

$$M_{s,t} = M_{e,t} \sqrt{\frac{T_e}{T_s}} = 2.86 \quad \Rightarrow \quad M_s = 2.99 \approx 3$$

- Approximation isentropique

En utilisant l'approximation isentropique sur l'aile, il n'y a globalement pas de changement de direction entre M_∞ et M_s (déflexion de $-\alpha$ puis α). La théorie isentropique donne donc

$$v(M_\infty) = v(M_s) \quad \Rightarrow \quad M_s = M_\infty = 3 \quad \Rightarrow \quad p_s = p_\infty = 0.1 \text{ atm}$$

La théorie exacte des chocs donne une valeur de pression légèrement plus faible mais très proche de l'approximation isentropique car la source de discontinuité venant du choc oblique est faible vu la déflexion faible de $\alpha = 5^\circ$. A noter aussi que les valeurs obtenues pour la théorie exacte des chocs repose sur les tables, arrondies aux valeurs les plus proches, ce qui constitue une source d'imprécision.

NB : en utilisant les formules plutôt que les tables, on obtient les résultats suivants

ii. $p_e = 0.0668 \text{ atm}, p_i = 0.1454 \text{ atm}$

iii. $c_l = 0.1243, c_d = 0.0105$

iv. $p_{\text{pitot}} = 1.4846 \text{ atm}$

v. Théorie exacte des chocs (à partir de l'intrados) : $p_s = 0.100008 \text{ atm}, M_s = 2.9964$

Théorie exacte des chocs (à partir de l'extrados) : $p_s = 0.099953 \text{ atm}, M_s = 2.9959$

Approximation isentropique : $p_s = 0.1 \text{ atm}, M_s = 3$