

*Durée de l'épreuve : 4 heures.*
  
*Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
  
*Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom.*
  
*Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.*

### Question I

Établissez l'équation de conservation de la masse d'un fluide compressible dans ses formes locales et intégrales.

Que devient la forme locale de cette équation dans le cas d'un fluide incompressible ? Quand un fluide peut-il être considéré comme incompressible ? Justifiez.

### Question II

Déterminez, sans les résoudre, les équations de base décrivant la propagation des ondes de gravité. Pour ce faire, négligez la tension superficielle et considérez des ondes planes. Précisez les autres hypothèses utilisées.

Discutez, sans développements mathématiques, les caractéristiques principales des ondes de gravité.

### Question III

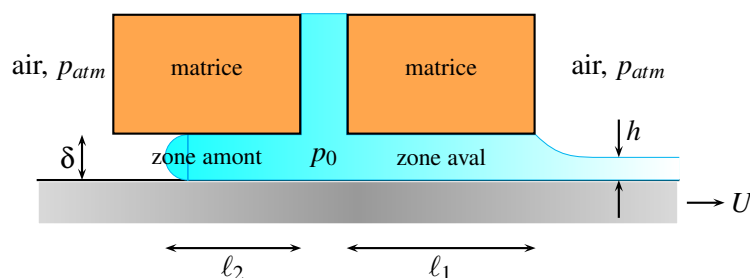
Introduisez et décrivez le concept de cascade de Kolmogorov. Estimez la microéchelle de Kolmogorov et caractérisez le spectre d'énergie de la turbulence selon Kolmogorov.

Expliquez brièvement le rapport entre ce spectre d'énergie et les approches RANS, LES et DNS de simulation des écoulements turbulents.

### Question IV

L'une des méthodes utilisées pour assurer le revêtement en continu de tôles métalliques consiste à forcer le passage de la peinture (ou de la substance utilisée pour le revêtement) au travers d'un orifice pratiqué dans une matrice et d'appliquer ainsi le revêtement sur la tôle se déplaçant à une vitesse constante  $U$ .

L'écoulement de la peinture est globalement dans le sens de la progression de la tôle dans la zone en aval de l'orifice. En amont, il se développe une région de longueur  $\ell_2$  dans laquelle le développement d'un écoulement rétrograde est compensé par le mouvement d'entraînement de la tôle.



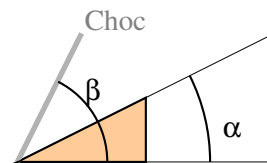
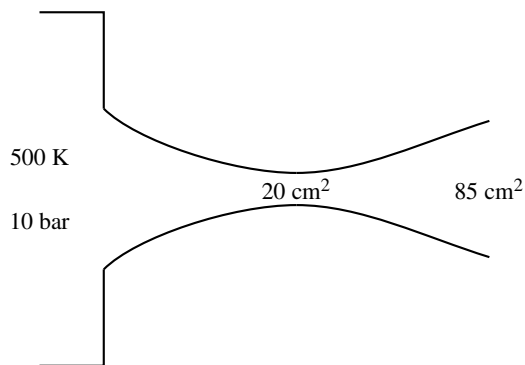
On suppose que l'écoulement est stationnaire et pleinement développé. La peinture est assimilée à un fluide Newtonien de viscosité dynamique  $\mu$  constante. La compressibilité du fluide et la tension superficielle sont négligées. On suppose connues et constantes les valeurs des paramètres (strictement positifs)  $U$ ,  $p_0$ ,  $\delta$  et  $\ell_1$ .

On note  $\delta$  la distance, supposée petite, entre la matrice et la tôle,  $p_0$  la pression au niveau de l'orifice et  $p_{atm}$  la pression atmosphérique. La dimension transversale  $e$  du dispositif est supposée très grande par rapport à chacun des dimensions du plan illustré ci-dessus.

- i. Déterminez l'expression des champs de vitesse et de pression dans la zone aval.
- ii. Déterminez l'expression des champs de vitesse et de pression dans la zone amont.
- iii. Déterminez l'expression de  $\ell_2$  en fonction de  $p_0$ ,  $p_{atm}$ ,  $\delta$  et  $\mu$ .
- iv. Déterminez l'épaisseur  $h$  du film déposé sur la tôle.
- v. Calculez la puissance à développer pour assurer le mouvement de la tôle dans le dispositif.

### Question V

On considère une buse de Laval (convergent-divergent) dont le col possède une aire de  $20 \text{ cm}^2$  et la section de sortie est de  $85 \text{ cm}^2$ . La pression et la température dans le réservoir amont (supposé de grandes dimensions) sont respectivement de 10 bar et 500 K.



- i. Quelle devrait être la pression extérieure pour que l'écoulement soit partout sous-sonique ?
- ii. Quelle devrait être la pression extérieure pour que le régime soit adapté (régime supersonique dans le divergent, sans choc) ?
- iii. Décrivez qualitativement l'écoulement dans la buse de Laval et calculez le débit massique de l'air si la pression extérieure est de 9 bar.
- iv. Déterminez la pression extérieure si on observe un choc normal juste au niveau de la section de sortie.
- v. Calculer le nombre de Mach à la sortie si, lorsqu'on y place un dièdre d'ouverture  $\alpha = 20^\circ$  (Cf. dessin ci-dessus), on y observe un choc faible incliné d'un angle  $\beta = 37^\circ 46'$  par rapport à l'axe de la tuyère.

L'air est assimilé à un gaz parfait avec  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma = 1.4$ . Si vous devez lire des informations dans les tables, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

## SOLUTION TYPE

### Question I

Cf. support du cours théorique.

### Question II

Cf. support du cours théorique.

### Question III

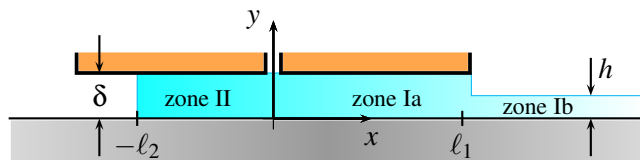
Cf. support du cours théorique.

### Question IV

Dans ce dispositif, le mouvement du fluide est induit, d'une part, par le déplacement de la plaque inférieure à la vitesse  $U$  et, d'autre part, par la différence de pression entre l'orifice central ( $p_0$ ) et les extrémités libres des matrices ( $p_{atm}$ ).

Le problème peut être résolu en appliquant les équations de Navier-Stokes aux trois zones identifiées sur la figure ci-dessous :

- la zone Ia située sous la matrice, en aval de l'orifice central ;
- la zone Ib située en aval de la matrice où le film prend sa forme finale ;
- la zone II située en amont de l'orifice.



Dans chacune des zones, on suppose l'écoulement pleinement développé, *i.e.* on néglige les effets de bords associés à la transition d'une zone à l'autre et on considère dès lors qu'il n'y a pas de variation de la vitesse du fluide dans la direction du mouvement de la plaque.

De plus, la dimension transversale du dispositif étant supposée très grande, on peut considérer qu'il n'y a pas de variation suivant cette direction. Le problème est donc bi-dimensionnel.

Finalement, on considère que l'écoulement est stationnaire, que la peinture se comporte comme un fluide Newtonien de viscosité constante et que la compressibilité et les tensions de surfaces peuvent être négligées. La gravité est également négligée.

Dans les équations de Navier-Stokes, ces hypothèses se traduisent par les simplifications suivantes :

- l'écoulement est stationnaire  $\Rightarrow \partial_t \cdot = 0$  ;
- les effets de bord sont négligés et l'écoulement est pleinement développé  $\Rightarrow \partial_x u = 0$  ;
- l'écoulement est bi-dimensionnel  $\Rightarrow \partial_z \cdot = 0$  et  $w = 0$  ;
- il n'y a pas de force volumique  $\Rightarrow f_i = 0$ .

Les équations de continuité et de quantité de mouvement selon  $x$  et  $y$  deviennent alors

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (1)$$

$$\rho \partial_x u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \mu \left( \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u \right) \quad (2)$$

$$\rho \partial_x v + u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p + \mu \left( \partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v \right) \quad (3)$$

Après intégration de l'équation (1), on obtient  $v = \text{cst}$ . La constante est déterminée en utilisant le fait que la vitesse verticale est nulle à la paroi ( $v(0) = 0$ ). Finalement, la vitesse verticale est nulle partout dans l'écoulement et  $v = 0$  dans les trois zones.

Puisque  $v = 0$ , les équations (2) et (3) deviennent

$$\begin{aligned}\partial_{yy}^2 u &= \frac{1}{\mu} \partial_x p \\ 0 &= \partial_y p\end{aligned}$$

Ces équations montrent que la pression est une fonction de la seule coordonnée  $x$  et que le gradient longitudinal de pression  $\partial_x p$  est constant (puisque le membre de gauche de la première équation est une fonction de  $y$  uniquement, alors que le membre de droite ne dépend que de  $x$ ).

En intégrant deux fois l'équation de quantité de mouvement selon  $x$ , on obtient donc

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} [\partial_x p] y^2 + Ay + B, \quad (4)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  ainsi que l'expression du gradient de pression  $[\partial_x p]$  sont déterminés en appliquant les conditions aux limites propres à chacune des zones.

En partant de cette première analyse, on peut répondre aux diverses questions posées.

i. Dans la zone Ia, la condition de non-glissement s'écrit

$$\begin{cases} u(0) = U, \\ u(\delta) = 0, \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer

$$\begin{cases} A^{Ia} = -\frac{1}{2\mu} [\partial_x p]^{Ia} \delta - \frac{U}{\delta}, \\ B^{Ia} = U. \end{cases}$$

La pression varie linéairement selon

$$p^{Ia}(x) = p_0 + \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_1} x, \quad [\partial_x p]^{Ia} = \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_1}$$

en tenant compte des conditions aux limites

$$p(0) = p_0, \quad p(\ell_1) = p_{atm}$$

Les champs de vitesse et de pression sont donc, pour la zone Ia,

$$\begin{cases} u^{Ia}(y) = \frac{1}{2\mu} [\partial_x p]^{Ia} (y^2 - y\delta) + U \left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \\ p^{Ia}(x) = p_0 + \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_1} x. \end{cases} \quad (5)$$

ii. Les expressions des champs de vitesse et de pression dans la zone en amont de l'orifice central peuvent être déterminées exactement de la même manière que pour la zone Ia. Les conditions aux limites sur la vitesse sont strictement identiques, seules celles sur la pression changent. En effet, on a ici

$$p(0) = p_0, \quad p(-\ell_2) = p_{atm}$$

Il vient donc

$$\begin{cases} u^{II}(y) = \frac{1}{2\mu} [\partial_x p]^{II} (y^2 - y\delta) + U \left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \\ p^{II}(x) = p_0 - \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_2} x, \quad [\partial_x p]^{II} = -\frac{p_{atm} - p_0}{\ell_2} \end{cases} \quad (6)$$

- iii. La longueur  $\ell_2$  de la zone en amont de l'orifice central peut être déterminée en exprimant que, en régime stationnaire, le débit total au travers de celle-ci doit être nul. Initialement, de la peinture 'déborde' dans cette zone amont et s'y accumule. Ensuite, en régime, la quantité de fluide sortant de l'orifice central vers cette zone est compensée exactement par le mouvement d'entraînement induit par le déplacement de la plaque.

En utilisant (6), on a donc

$$\int_0^{\delta} u^{II}(y) dy = \frac{U\delta}{2} - [\partial_x p]^{II} \frac{\delta^3}{12\mu} = 0$$

Dès lors

$$[\partial_x p]^{II} = \frac{6\mu U}{\delta^2}$$

et, tenant compte de l'expression (6) du gradient de pression,

$$\ell_2 = \frac{\delta^2}{6\mu U} (p_0 - p_{atm}).$$

- iv. Dans la zone Ib, la condition de non glissement est toujours applicable au niveau de la paroi. La condition au niveau de l'interface entre le film de peinture et l'air est déterminée en exprimant l'égalité des contraintes de part et d'autre de l'interface. Négligeant la viscosité de l'air, il vient

$$\begin{cases} u(0) = U, \\ \partial_y u|_{y=h} = 0. \end{cases}$$

De plus, dans cette zone,  $p(h) = p_{atm}$ , et ce quelque soit  $x \geq l_1$ . Sachant que la pression ne varie pas avec  $y$ , on a  $p^{Ib} = p_{atm}$  et donc  $[\partial_x p]^{Ib} = 0$ . Finalement, on obtient donc

$$\begin{cases} A^{Ib} = 0, \\ B^{Ib} = U. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u^{Ib} = U, \\ p^{Ib} = p_{atm}. \end{cases} \quad (7)$$

Dans la zone Ib, la peinture se comporte comme un corps rigide se déplaçant avec la plaque. L'épaisseur  $h$  du film de peinture peut être déterminée en utilisant la conservation du débit. En effet, le débit dans la zone Ia doit être équivalent à celui dans la zone Ib. En utilisant les résultats (5) et (7), l'égalité des débits volumiques s'écrit successivement

$$\int_0^{\delta} u^{Ia}(y) dy = Uhe,$$

$$\frac{U\delta}{2} - \frac{\delta^3}{12\mu} [\partial_x p]^{Ia} = Uh,$$

et l'épaisseur du film est donc donnée par

$$h = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^3}{12\mu U} \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_1}.$$

- v. La puissance à développer pour que la plaque avance à vitesse constante est fonction de la force de frottement exercée par le fluide. La contrainte visqueuse à considérer ici est la composante

$\tau_{xy} = -\mu \partial_y u$  relative à une force selon  $x$  exercée sur une facette perpendiculaire à  $y$ . En utilisant les résultats préalablement établis (5), (7) et (6), on a donc, au niveau de la plaque

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{Ia}]_{y=0} = \left( \frac{\delta}{2} \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_1} + \frac{\mu U}{\delta} \right), \\ \tau_{xy}^{Ib}]_{y=0} = 0, \\ \tau_{xy}^{II}]_{y=0} = \left( -\frac{\delta}{2} \frac{p_{atm} - p_0}{\ell_2} + \frac{\mu U}{\delta} \right). \end{cases}$$

La force exercée par la plaque sur le fluide est déterminée en intégrant les contraintes sur les surfaces où elles s'appliquent. Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{p \rightarrow f} &= e \int_{-\ell_2}^0 \tau_{xy}^{II}]_{y=0} dx \mathbf{e}_x + e \int_0^{\ell_1} \tau_{xy}^{Ia}]_{y=0} dx \mathbf{e}_x, \\ &= \frac{\mu U e}{\delta} (\ell_1 + \ell_2) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Par action-réaction, cette force est équivalente en intensité et direction à la force qu'il faut appliquer sur la plaque pour la maintenir à la vitesse  $U$ . La puissance à fournir au système est donc  $\mathcal{P} = \mathbf{F}^{p \rightarrow f} \cdot (U \mathbf{e}_x)$ , soit

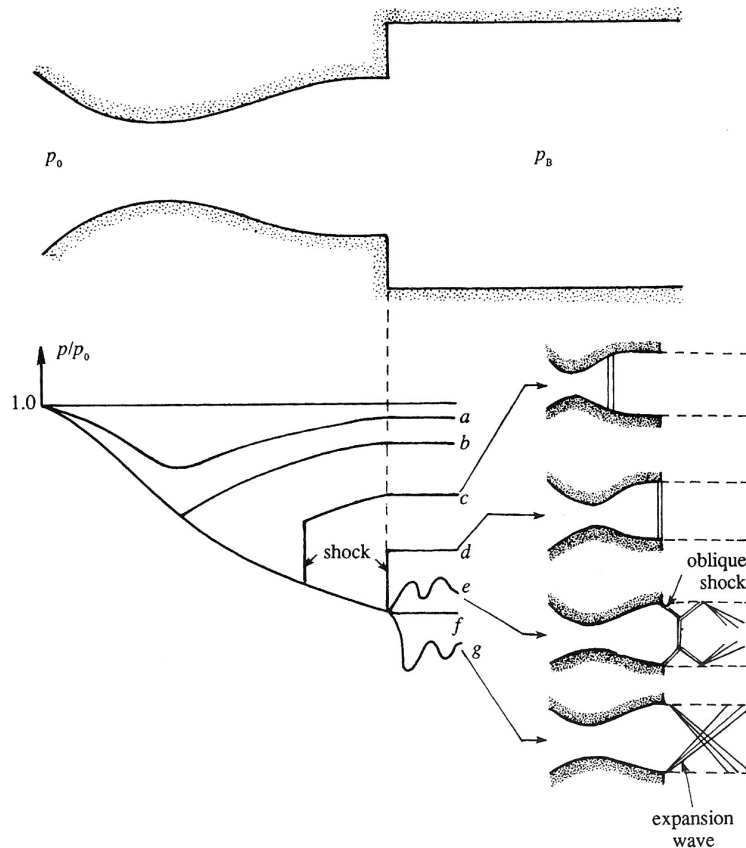
$$\mathcal{P} = \frac{\mu U^2 e}{\delta} (\ell_1 + \ell_2).$$

### Question V

Notons avec un indice *exit* les conditions de sortie.

i. Pour  $A_{exit} = 85 \text{ cm}^2$  et  $A_* = 20 \text{ cm}^2$ , on a  $A_{exit}/A_* = 4.25$ .

Dans les tables on trouve que ce rapport correspond à  $M_{exit} = 0.14$  ou à  $M_{exit} = 3.00$ . Ces deux valeurs correspondent respectivement aux cas *b* et *f* de la figure ci-dessous.



La première valeur correspond à un écoulement qui est sous-sonique dans toute la tuyère et tout juste sonique au col.

La seconde valeur correspond à une tuyère adaptée avec un écoulement supersonique sans choc dans le divergent.

La contre-pression correspondant au premier cas est telle que (table pour  $M = 0.14$ )

$$\frac{p_{exit}}{p_0} = 0.9864 \quad \Rightarrow \quad p_{exit} = 9.864 \text{ bar}$$

Pour que l'écoulement soit sous-sonique dans toute la tuyère, il faut que la pression extérieure soit supérieure ou égale à 9.864 bar.

- ii. Le régime adapté correspond à la deuxième solution identifiée ci-dessus, *i.e.* à  $M_{exit} = 3$ . Dans ce cas,

$$\frac{p_{exit}}{p_0} = 0.02722 \quad \Rightarrow \quad p_{exit} = 0.2722 \text{ bar}$$

- iii. Si  $p_{exit} = 9$  bar, on se trouve dans des conditions intermédiaires entre les conditions  $b$  et  $f$  de la figure ci-dessus : le régime est supersonique au col mais devient rapidement sous-sonique au travers d'un choc normal se produisant peu après le col.

Comme le régime est supersonique au col, on sait que le débit est égal au débit maximum pouvant s'écouler au travers de la tuyère et que celui-ci est donné par

$$Q = \rho_* u_* A_* = \frac{p_*}{RT_*} \sqrt{\gamma RT_*} A_* = p_* \sqrt{\frac{\gamma}{RT_*}} A_*$$

On calcule successivement

$$\frac{p_*}{p_0} = 0.5283 \quad \Rightarrow \quad p_* = 5.283 \text{ bar}$$

$$\frac{T_*}{T_0} = 0.8333 \quad \Rightarrow \quad T_* = 416.66 \text{ K}$$

de sorte que

$$Q = 5.283 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{1.4}{287 \cdot 416.33}} 20 \cdot 10^{-4} = 3.62 \text{ kg/s}$$

- iv. On se place ici dans le cas  $d$  de la figure ci-dessus. L'écoulement est supersonique entre le col et la section de sortie. En fonction des résultats dégagés au points i. et ii., on sait qu'on aborde la section de sortie avec  $M_1 = 3$  et  $p_1 = 0.2722$  bar. Ces conditions sont celles qui règnent en amont du choc. Pour un choc à un tel nombre de Mach, on a

$$\frac{p_2}{p_1} = 10.3333 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_{exit} = 2.813 \text{ bar}$$

- v. En consultant le graphique de  $\sigma(\delta)$ , on constate qu'un choc oblique d'angle  $\beta = \sigma = 37^\circ 46'$  induisant une déviation de l'écoulement d'un angle  $\alpha = \delta = 20^\circ$  correspond à un nombre de Mach incident égal à 3.

La mesure a donc été effectuée en régime adapté.