Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2015

MECA0025-1 - Mécanique des fluides
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom.
Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

i. À partir de la première loi de la thermodynamique et de l'équation de bilan de la quantité de mouvement, établissez la forme différentielle de l'équation de bilan de l'énergie interne d'un fluide quelconque sous la forme

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \phi - \nabla\cdot\mathbf{q} \tag{†}$$

ii. Explicitez *toutes* les différentes grandeurs apparaissant dans (†) et donnez l'interprétation physique de *tous* les termes.

iii. Particularisez l'équation (†) au cas de la convection libre d'un gaz parfait dont la viscosité et la conductibilité thermique sont négligeables.

Question II

Présentez et discutez les approches RANS, LES et DNS pour la simulation numérique d'écoulements turbulents. Précisez les hypothèses et limitations éventuelles ainsi que les coûts numériques relatifs.

Question III

Définissez aussi complètement que possible les notions suivantes :

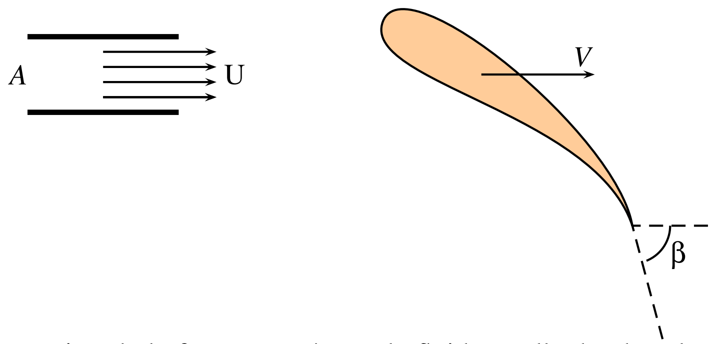
i. dérivée matérielle ;
ii. fluide Newtonien ;
iii. nombre de Brinkman ;
iv. régime de Stokes ;
v. onde de capillarité.

Question IV

On considère un flux d'air – considéré comme incompressible et non visqueux – sortant à la vitesse U d'une tuyère horizontale de section A. Le flux d'air vient frapper une aube de turbine se déplaçant horizontalement à la vitesse constante V et s'en trouve ainsi dévié vers le bas. L'air quitte l'aube avec une vitesse *relative* par rapport à l'aube présentant un angle β avec l'horizontale.

Comme on suppose l'air non visqueux, la norme de la vitesse relative d'incidence de l'air par rapport à l'aube est égale à la norme de la vitesse relative de l'air par rapport à l'aube après déviation.

On étudie le régime stationnaire. Le système est installé dans un espace non confiné où règne la pression atmosphérique. On néglige les forces en volume au sein du fluide.



i. Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est au repos ($V = 0$).

ii. Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est en mouvement à la vitesse horizontale $V > 0$.

iii. Justifiez mathématiquement l'égalité des vitesses relatives de l'air par rapport à l'aube avant et après déviation.

iv. Déterminez l'expression de la puissance développée par la force exercée par le fluide sur l'aube et montrez que la puissance récupérée est maximale si $V = U/3$.

Question V

Soit un réservoir de grandes dimensions contenant de l'air au repos à une température de 500 K et une pression de 5 atm. L'air s'échappe via une tuyère convergenge-divergente dimensionnée pour assurer un flux de 1 kg/s vers l'extérieur, où règne la pression atmosphérique. L'écoulement de sortie est supersonique mais aucun choc n'apparaît dans la tuyère.

On assimile l'air à un gaz idéal. On considère $\gamma = 1.4$, $R = 287$ m^2/(s^{2}K), $c_p = 1005$ m^2/(s^{2}K), $c_v = 718$ m^2/(s^{2}K).

Déterminez

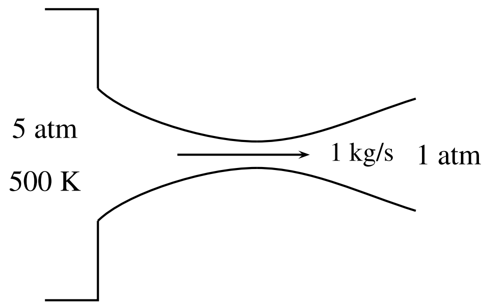
i. le nombre de Mach de sortie ;

ii. la température de l'air à la sortie de la tuyère ;

iii. la vitesse de l'air à la sortie de la tuyère ;

iv. la section critique ;

v. la section de sortie.



Si vous devez lire des informations dans les tables, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

où ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ et $\boldsymbol{\tau}$ désignent respectivement la masse volumique, la vitesse, les forces par unité de volume et le tenseur des tensions.

Multipliant scalairement cette équation par la vitesse, on obtient une équation de bilan de l'énergie cinétique (par unité de masse)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2\right) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \qquad (\spadesuit)$$

Le bilan de l'énergie totale (première loi de la thermodynamique) s'écrit par ailleurs

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2\right) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \qquad (\diamondsuit)$$

où e désigne l'énergie interne par unité de masse et $\mathbf{q}$ est le flux de chaleur. Cette équation traduit le fait que l'énergie totale varie en raison de la puissance développée par les forces en volume et les tensions de surface et du flux de chaleur apporté au système.

Par soustraction de $(\diamondsuit)$ et $(\spadesuit)$, on obtient

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Cette équation peut être transformée en notant que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) &= \partial_j (u_i \tau_{ij}) - u_i \partial_j \tau_{ij} \\
&= (\partial_j u_i) \tau_{ij} \\
&= (\partial_j u_i)(-p\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \\
&= -p\partial_i u_i + e_{ij}\sigma_{ij} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}
\end{aligned}$$

où p désigne la pression, $\boldsymbol{\sigma}$ est le déviateur des tension et $\mathbf{e}$ est le tenseur des taux de déformation.

Introduisant la fonction de dissipation $\phi = \sigma_{ij} e_{ij} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}$, il vient, comme attendu,

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \phi - \nabla \cdot \mathbf{q} \qquad (\dagger)$$

ii. Toutes les grandeurs intervenant dans l'équation $(\dagger)$ ont été introduites au point précédent.

Les différents termes de l'équation représentent respectivement, dans l'ordre où ils apparaissent dans $(\dagger)$,

- le taux de variation de l'énergie interne pour une particule fluide donnée (dérivée matérielle) ;
- le taux de travail (puissance) associé à la compressibilité du fluide (réversible) ;
- la dissipation visqueuse (irréversible) ;
- l'apport d'énergie thermique par conduction.

iii. Dans le cas d'un gaz parfait, la viscosité et la conductibilité thermique sont négligeables de sorte que ϕ et $\mathbf{q}$ sont nuls. Par ailleurs, l'énergie interne s'exprime directement en fonction de la température selon $e = c_v T$. Dès lors, l'équation $(\dagger)$ devient

$$c_v \frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

où on a exploité l'équation de continuité pour transformer le membre de droite.

Dans les problèmes de convection libre, la masse volumique dépend essentiellement de la température. De plus, pour un gaz parfait, le coefficient de compressibilité thermique α est égal à l'inverse de la température. Dès lors, on obtient successivement

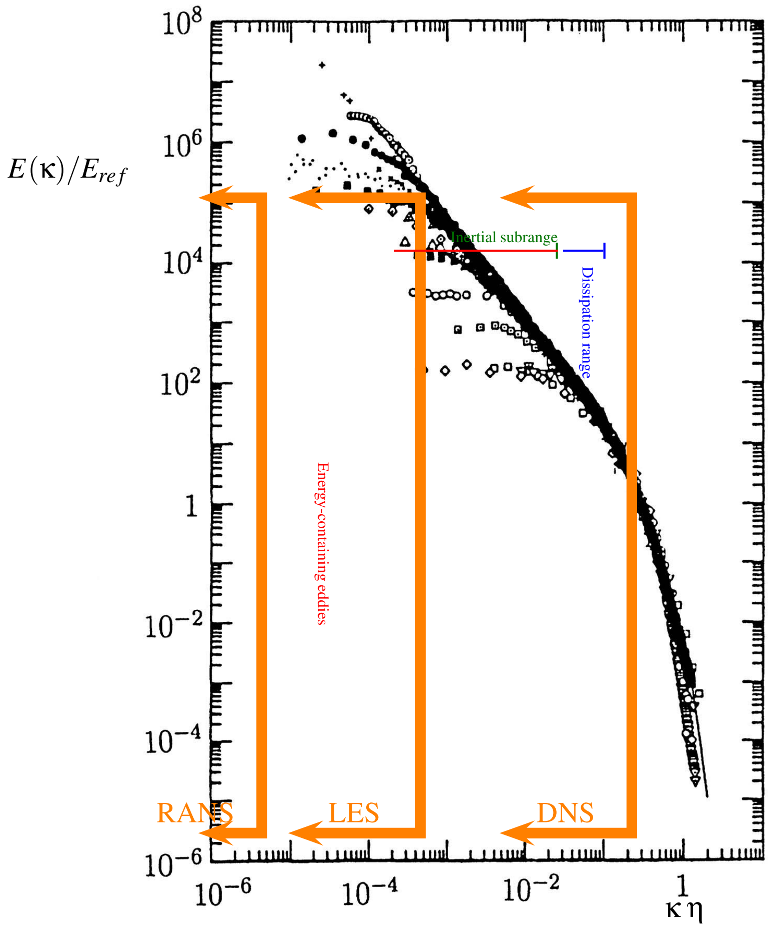
$$\frac{p}{\rho}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right] = \frac{p}{\rho}\left[\alpha\frac{DT}{Dt}\right] = \frac{p}{\rho T}\frac{DT}{Dt} = R\frac{DT}{Dt} = (c_p - c_v)\frac{DT}{Dt}$$

L'équation de bilan pour l'énergie interne prend donc la forme finale

$$c_p\frac{DT}{Dt} = 0$$

Question II

Les approches RANS, LES et DNS permettent de simuler numériquement des écoulements turbulents au prix de niveaux d'approximation et de coûts numériques différents. Les spectres des longueurs caractéristiques décrites par les différentes approches sont résumées sur le schéma ci-dessous présentant la densité d'énergie en fonction du nombre d'onde.



Dans l'approche DNS (*Direct Numerical Simulation*), toutes les échelles du mouvement sont explicitement décrites par le modèle numérique. Aucune hypothèse simplificatrice ne doit donc être introduite mais le coût numérique est très important car la résolution spatiale et temporelle doit être suffisante pour capturer aussi bien les structures les plus grandes, à l'échelle du problème considéré, que les structures turbulentes les plus fines, caractérisées par la microéchelle de Kolmogorov

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}$$

Le coût d'une telle simulation est proportionnel à Re^3, ce qui la rend inadaptée pour les applications pratiques réelles. Les simulations DNS menées dans des configurations simples permettent cependant de comprendre la dynamique de la turbulence.

Dans l'approche RANS (Reynods Average Navier-Stokes), des versions moyennes des équations de Navier-Stokes sont résolues. Celles-ci permettent de définir et de prédire l'écoulement moyen. Les non-linéarités des équations de Navier-Stokes sont responsable de l'apparition de termes additionnels, les tensions de Reynolds, lorsqu'on applique l'opérateur de moyenne. Ces tensions de Reynolds prennent la forme de corrélations entre les fluctuations turbulentes des différentes grandeurs et ne peuvent s'exprimer en fonction des variables d'état moyennes. Dès lors, une paramétrisation doit être introduite, *i.e.* un modèle de fermeture turbulente (comme le modèle $k-\varepsilon$) doit être ajouté pour fermer le système d'équations. Cette paramétrisation s'accompagne de l'introduction d'hypothèses simplificatrices qui limitent la représentativité du modèle.

L'approche LES (*Large Eddy Simulation*) est intermédiaire entre les approches DNS et RANS. Par rapport aux simulations DNS, une réduction important du coût numérique des simulations est obtenu en ne représentant pas explicitement les variations aux échelles les plus petites de la turbulence. Contrairement à l'approche RANS, toute les échelles de la turbulence ne sont cependant pas lissées. Les structures les plus grandes, lesquelles contiennent le plus d'énergie et dont l'anisotropie reflète l'anisotropie de l'écoulement macroscopique, sont décrites explicitement par le modèle. Seules les structures les plus petites sont lissées par une moyenne spatiale. Comme ces structures sont isotropes et pas (ou peu) influencées par l'écoulement global, elles sont de nature quasiment universelle et une paramétrisation simple (modèle sous-maille de type Smagorinski) peut être introduite.

Question III

i. *Dérivée matérielle.*

La dérivée matérielle d'une grandeur mesure le taux de variation de cette grandeur en suivant une particule fluide au cours de son mouvement, *i.e.* dans un formalisme Lagrangien. La dérivée matérielle s'exprime en fonction des dérivées partielles par rapport au temps et aux coordonnées de l'espace via

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

ii. *Fluide Newtonien.*

Un fluide est dit Newtonien lorsque le tenseur des tensions $\boldsymbol{\tau}$ dépend linéairement du taux de déformation $\mathbf{e}$, sans effet mémoire, ni hysteresis ou anisotropie. Pour un tel fluide, on a

$$\boldsymbol{\tau} = (-p + \lambda\, \nabla \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{I} + 2\mu\, \mathbf{e}$$

où λ et μ sont des constantes caractéristiques du fluide.

iii. *Nombre de Brinkman.*

Le nombre de Brinkman est défini par

$$Br = \frac{\mu U^2}{k \Delta T}$$

où μ et k désignent respectivement la viscosité dynamique et la diffusivité thermique du fluide, et où U et ΔT sont des valeurs caractéristiques de la vitesse et des différences de température dans l'écoulement. Le nombre de Brinkman mesure l'importance relative de la dissipation visqueuse et du transport par conduction dans l'équation pour l'énergie interne du fluide.

iv. *Régime de Stokes.*

Le régime de Stokes est le régime d'écoulement à très faible nombre de Reynolds, *i.e.* $Re \ll 1$. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes (pour une fluide incompressible) deviennent linéaires, *i.e.*

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{g} - \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \\ \rho_0 c \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T \end{cases} \qquad \Delta p \sim \frac{\mu U}{L}$$

v. *Onde de capillarité.*

On appelle onde de capillarité une onde qui se déplace à l'interface entre un fluide et un gaz (ou entre deux fluides non miscibles) et dont la force de rappel est la tension superficielle.

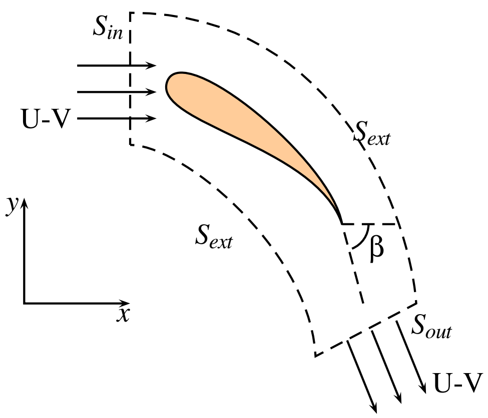
La tension superficielle n'influence la propagation d'ondes de surface que pour de petites longueurs d'ondes, *i.e.* pour

$$\lambda < \lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

où σ désigne la tension superficielle, g l'accélération de pesanteur et ρ la densité du fluide. Elle est alors responsable de l'existence d'un minimum de la vitesse de phase donnée par

$$c_{min} = \sqrt[4]{\frac{4g\sigma}{\rho}}$$

Question IV



Pour résoudre ce problème, des bilans de masse et de quantité de mouvement sont successivement appliqués sur un volume de contrôle en mouvement à la vitesse $V\mathbf{e}_x$ de l'aube.

Le volume de contrôle, représenté ci-contre, est défini de telle sorte que l'écoulement entre dans le volume de contrôle par la frontière S_{in} et en sort par S_{out}. Les frontières S_{ext} coïncident avec des lignes de courant. On note S_{tot} la frontière totale du volume de contrôle.

Si on suppose que l'aube est seulement responsable d'une déviation de la vitesse mais que la norme de la vitesse relative est inchangée, le bilan de masse s'écrit, en régime stationnaire,

$$\begin{aligned} \int_{S_{tot}} \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot} &= 0 \\ -\rho(U-V)S_{in} + \rho(U-V)S_{out} &= 0 \end{aligned}$$

Les surfaces par lesquelles le fluide entre et sort du volume de contrôle sont donc identiques et $S_{in} = S_{out} = A$.

En considérant en plus que le fluide est non visqueux et qu'il n'y a pas de force de volume, le bilan de quantité de mouvement s'écrit,

$$\int_{S_{tot}} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot} = -\int_{S_{tot}} p\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_{tot} + \mathbf{F}^{a\to f}$$

où $\mathbf{F}^{a\to f}$ est la force exercée par l'aube sur le fluide. La pression sur la surface S_{tot} étant partout égale à la pression atmosphérique, le terme contenant l'intégrale de la pression est nul puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une constante sur une surface fermée. La force exercée par le fluide sur l'aube s'écrit donc

$$\mathbf{F}^{f\to a} = -\int_{S_{tot}} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot}$$

ce qui donne, selon x et y,

$$\begin{aligned} F_x^{f\to a} &= \rho(U-V)^2A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\to a} &= \rho(U-V)^2A\sin\beta \end{aligned}$$

Les questions posées précédemment peuvent maintenant être étudiées.

i. *Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est au repos* ($V=0$).
Dans le cas où l'aube est statique, les résultats obtenus précédemment sont particularisés au cas où $V=0$. Il vient donc

$$\begin{aligned} F_x^{f\to a} &= \rho U^2A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\to a} &= \rho U^2A\sin\beta \end{aligned}$$

ii. *Déterminer l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est en mouvement à la vitesse horizontale $V>0$.*
Ici, les résultats généraux peuvent être utilisés, d'où

$$\begin{aligned} F_x^{f\to a} &= \rho(U-V)^2A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\to a} &= \rho(U-V)^2A\sin\beta \end{aligned}$$

iii. *Justifiez mathématiquement l'égalité des vitesse relatives de l'air par rapport à l'aube avant et après déviation.*
Avec les hypothèses faites ici, Bernoulli peut être appliqué sur une ligne de courant passant par l'entrée et la sortie du volume de contrôle. Cela donne

$$p_{in}+\frac{1}{2}\rho\|V_{in}\|^2 = p_{out}+\frac{1}{2}\rho\|V_{out}\|^2.$$

Comme la pression sur S_{in} et S_{out} est égale à la pression atmosphérique, l'égalité des vitesses relatives avant et après déviation est démontrée.

iv. *Déterminer l'expression de la puissances développée par la force exercée par le fluide sur l'aube et montrez que la puissance récupérée est maximale si $V=U/3$.*
La puissance développée s'écrit

$$P = \mathbf{F}^{f\to a}\cdot\mathbf{V}$$

L'aube se déplaçant horizontalement, il vient

$$\begin{aligned} P(V) &= F_x^{f\to a}V \\ &= \rho V(U-V)^2S(1-\cos\beta) \end{aligned}$$

Pour obtenir la vitesse de l'aube à laquelle la puissance récupérée est maximale, on cherche les points stationnaires de P(V), *i.e.* les solutions de

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \rho A(1-\cos\beta)(3V^2-4UV+U^2)=0$$

soit

$$V=\frac{4U\pm 2U}{6}=\begin{cases} U \\ U/3 \end{cases}$$

On vérifie aisément que la solution $V=U$ correspond à un minimum de la puissance récupérée ($P=0$). La solution $V=U/3$ est la vitesse de l'aube à laquelle la puissance récupérée est maximale puisque

$$\left.\frac{\partial^2P}{\partial V^2}\right|_{V=U/3} = \rho A(1-\cos\beta)(6V-4U)\Big|_{V=U/3} = -2\rho AU(1-\cos\beta)<0$$

Pour une telle vitesse, on a

$$P=\frac{4}{27}\rho U^3A(1-\cos\beta)$$

Question V

Pour avoir un écoulement supersonique dans la section d'essai, il faut accélérer l'écoulement tout le long de la tuyère. On a donc un écoulement subsonique dans le convergent et supersonique dans le divergent. Le col est sonique puisqu'il s'agit de la section minimale. La température totale T_0 est conservée et est égale à la température dans le réservoir, puisque la vitesse y est nulle. De plus, comme il n'y a pas de choc, la pression totale p_0 est également conservée et est égale à la pression dans le réservoir. De même, la section sonique est conservée.

Connaissant la pression à la sortie p_s et la pression totale, on évalue le rapport $p_s/p_0 = 0.2$. Avec les tables, on relève que ces conditions correspondent à

$$M_s = 1.71, \quad \frac{A_s}{A^\star} = 1.347, \quad \text{et} \quad \frac{T_s}{T_0} = 0.631$$

(les valeurs tabulées correspondent à un rapport $p_s/p_0 = 0.1996$).

i. Déterminez le nombre de Mach de sortie.
Des tables, on détermine $M_s = 1.71$.

ii. Déterminez la température de l'air à la sortie de la tuyère.
Avec le rapport de température issu des tables, il vient

$$T_s = \frac{T_s}{T_0}\, T_0 = 0.63 \times 500 \text{ K} = 315.5 \text{ K}.$$

iii. Déterminez la vitesse de l'air à la sortie de la tuyère.
La vitesse de l'air à la sortie se calcule avec la vitesse du son $a_s = \sqrt{\gamma R T_s}$.

$$V_s = M_s \sqrt{\gamma R T_s} = 608.84 \text{ m/s}.$$

iv. Déterminez la section de sortie.
Pour déterminer la section de sortie, le débit massique est utilisé.

$$D_m = M_s A_s p_s \sqrt{\frac{\gamma}{R T_s}}$$

De là, on obtient la section de sortie

$$A_s = \frac{D_m}{M_s p_s} \sqrt{\frac{R T_s}{\gamma}} = 10.92 \text{ cm}^2,$$

où p_s est la pression à la sortie exprimée en Pascals.

v. Déterminez la section critique.
La section critique est déterminée en utilisant le rapport des sections issu des tables.

$$A^\star = \frac{A^\star}{A_s}\, As = 14.71 \text{ cm}^2$$