Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2023

MECA0025-1 - MÉCANIQUE DES FLUIDES
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Question I

Sur base des éléments ci-dessous, listez et explicitez les différentes conditions aux limites applicables à l'interface entre deux fluides non miscibles.

- $\left[\rho(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{v}})\cdot\tilde{\mathbf{n}}\right]=0$
- $\left[\left\{\rho\mathbf{u}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{v}})-\boldsymbol{\tau}\right\}\cdot\tilde{\mathbf{n}}\right]=\mathbf{t}^{\sigma}$
- $\left[\left\{\rho E(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{v}})-\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{q}\right\}\cdot\tilde{\mathbf{n}}\right]=\mathbf{t}^{\sigma}\cdot\tilde{\mathbf{v}}$
- $\mathbf{u}_I=\mathbf{u}_{II}$, $\mathbf{T}_I=\mathbf{T}_{II}$
- $\mathbf{u}_I=\mathbf{u}_{II}=\tilde{\mathbf{v}}$
- $\left[\boldsymbol{\tau}\cdot\tilde{\mathbf{n}}\right]+\mathbf{t}^{\sigma}=\mathbf{0}$
- $\left[\mathbf{q}\cdot\tilde{\mathbf{n}}\right]=\mathbf{0}$

$$\Sigma(\mathbf{x},t)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\Sigma}{dt}=\frac{\partial\Sigma}{\partial t}+\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\Sigma=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma=0$$

$$\rho(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{v}})\cdot\frac{\nabla\Sigma}{\|\nabla\Sigma\|}=0$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\Sigma=\frac{D\Sigma}{Dt}=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma=0$$

Expliquez les hypothèses éventuelles, les concepts, les notations utilisées, l'origine des équations, le raisonnement suivi et les implications/interprétations.

Question II

Introduisez le problème de la fermeture turbulente.
En vous basant sur les équations ci-dessous, montrez comment celle-ci peut être réalisée selon le modèle de Boussinesq-Prandtl.

$$-\overline{u_i' u_j'} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_e \bar{e}_{ij}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_{ij}^T = -\frac{\bar{p}}{\rho}\,\delta_{ij} + 2\nu \bar{e}_{ij} - \overline{u_i' u_j'}$$
$$= -\left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2k}{3}\right)\,\delta_{ij} + 2(\nu + \nu_e)\,\bar{e}_{ij}$$

$$\nu_e = u' \ell_m$$

- $\bar{u}(y + \ell_m) \approx \bar{u}(y) + \frac{d\bar{u}}{dy}\ell_m : u' \sim \ell_m \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$
- $\ell_m \sim \kappa\, y.$

$$\nu_e = \kappa^2 y^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$$

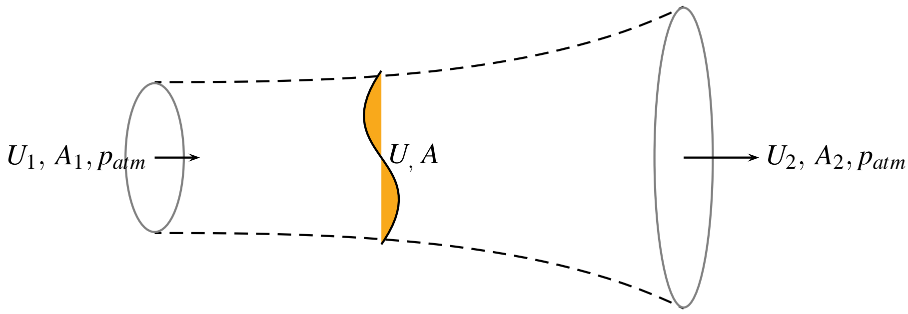
$$-\overline{u'v'} = \nu_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \kappa^2 y^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy} \approx const. = \frac{\tau_0}{\rho} = u_\star^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\bar{u}}{u_\star} = \frac{1}{\kappa}\ln y + const.$$

Expliquez les hypothèses éventuelles, les concepts, les notations utilisées, l'origine des équations, le raisonnement suivi et les implications/interprétations.

Question III

Afin de déterminer l'énergie pouvant être produite par une éolienne, on considère l'écoulement de l'air dans le tube de courant affecté par l'éolienne, comme schématisé ci-dessous.



Loin en amont de l'éolienne, l'air circule à la vitesse U_1 et la pression est égale à la pression atmosphérique p_{atm}. L'éolienne exerçant une résistance au passage de l'air, il en résulte une augmentation de la pression et une diminution de la vitesse lorsque l'air se rapproche de l'éolienne. Au niveau de l'éolienne même, l'air circule à la vitesse $U < U_1$. Au passage des pales, puisque l'éolienne extrait de l'énergie de l'écoulement, la pression chute d'une quantité Δp de sorte que la pression juste derrière l'éolienne est inférieure à la pression atmosphérique. En aval, l'écoulement affronte un gradient de pression adverse. La pression se rétablit progressivement pour atteindre la pression atmosphérique suffisamment loin en aval où l'air s'écoule à la vitesse U_2.

On néglige la viscosité. On suppose que l'air est incompressible et que le système est dans un état stationnaire. Les pressions seront exprimées par rapport à la pression atmosphérique.

i. Représenter schématiquement l'évolution de la vitesse et de la pression le long du tube de courant.

ii. Établir le bilan de masse sur le volume de contrôle constitué par le tube de courant.

iii. Par un bilan de quantité de mouvement sur le tube de courant, déterminez l'expression de la force $\Delta p A$ exercée par l'écoulement sur l'éolienne.

iv. Par une approche énergétique, déterminez l'expression de Δp en fonction de ρ, U_1 et U_2.

v. En exploitant les résultats ci-dessus, montrez que

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

vi. Déterminez l'expression du flux d'énergie cinétique P_w apporté par le vent sur une section d'aire A égale à celle de l'éolienne et la quantité d'énergie P_e réellement extraite par unité de temps par l'éolienne.

vii. Montrez que le rapport η de l'énergie extraite à l'énergie disponible peut s'écrire sous la forme

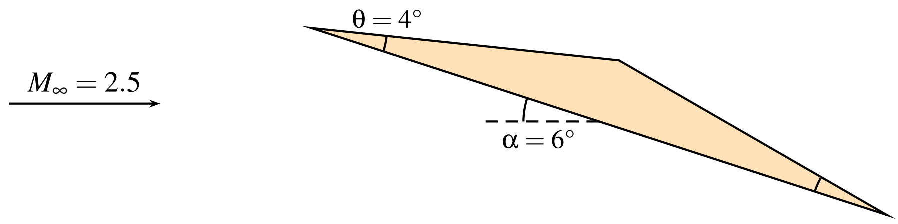
$$\eta = \frac{P_e}{P_w} = \frac{1}{2}(1+\lambda)(1-\lambda^2) \quad \text{où} \qquad \lambda = U_2/U_1$$

viii. Déterminez la quantité maximale d'énergie pouvant être extraite par une éolienne en fonction de sa section A, de la masse volumique de l'air ρ et de la vitesse du vent U_1.

Question IV

On considère l'écoulement bidimensionnel de l'air autour d'une aile triangulaire d'un avion volant à $M_\infty = 2.5$ avec un angle d'incidence $\alpha = 6°$. L'air ambient à l'altitude de vol, assimilé à un gaz parfait, est à la température $T_\infty = 260K$ et à la pression $p_\infty = 60kPa$.

Le profil de l'aile est celui d'un triangle isocèle qui présente un angle $\theta = 4°$ aux bords d'attaque et de fuite. *Sur le dessin ci-dessous, les angles sont exagérés pour améliorer la lisibilité.*



i. Décrivez qualitativement l'écoulement sur les différentes parties de l'aile.
ii. Calculez la pression agissant sur les différentes parties de l'aile.
iii. Calculez les coefficients de lift et de drag.

L'air est assimilé à un gaz parfait dont les propriétés sont $R = 287$ *J/(kg · K),* $\gamma = 1.4$, $c_p = 1005$ $m^2/s^2/K$ *et* $c_v = 718$ $m^2/s^2/K$. *Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.*

Question I

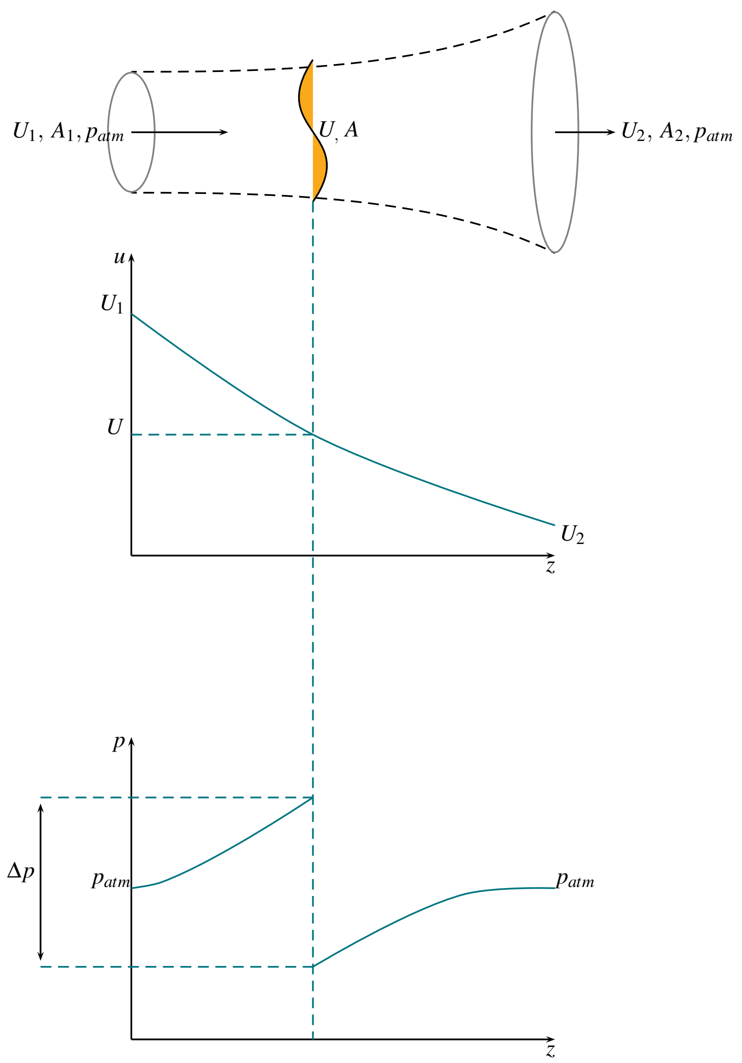
Cf cours théorique.

Question II

Cf cours théorique.

Question III

i. Les variations de vitesse et de pression le long du tube de courant sont représentées ci-dessous.



ii. Le bilan de masse s'écrit

$$\rho A_1 U_1 = \rho A U = \rho A_2 U_2 \qquad (\spadesuit)$$

iii. La force s'exerçant sur les pales de l'éolienne est due à la différence de pression Δp de part et d'autre de celles-ci. Si on mesure les écarts de pression par rapport à la pression atmosphérique, on a $p_{atm} = 0$ et le bilan de quantité de mouvement permet d'exprimer cette force sous la forme

$$\Delta p A = \rho A_1 U_1^2 - \rho A_2 U_2^2 \qquad (\heartsuit)$$

iv. L'équation de Bernoulli permet d'écrire

$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho U^2 + p_{up}$$

et

$$\frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho U^2 + p_{down}$$

où p_{up} et p_{down} désignent les pressions de part et d'autre des pales. On a donc

$$\Delta p = p_{up} - p_{down} = \frac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_2^2) \qquad (\diamondsuit)$$

De façon alternative, on peut calculer la puissance W_S développée par l'éolienne par un bilan d'énergie :

$$W_S = \rho UA\left(\frac{1}{2}U_1^2 + \frac{p_{atm}}{\rho}\right) - \rho UA\left(\frac{1}{2}U_2^2 + \frac{p_{atm}}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\rho UA(U_1^2 - U_2^2)$$

Cette puissance étant également donnée par

$$W_S = \Delta pAU$$

on obtient l'expression ($\diamondsuit$) de la différence de pression.

v. En exploitant ($\spadesuit$), on peut mettre ($\heartsuit$) sous la forme

$$\Delta pA = \rho A_1 U_1^2 - \rho A_2 U_2^2 = \rho AU(U_1 - U_2)$$

En comparant cette expression avec ($\diamondsuit$), il vient

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

vi. Le flux d'énergie cinétique apporté par le vent sur une section A égale à celle de l'éolienne est donné par

$$P_w = \frac{1}{2}\rho U_1^2 AU_1$$

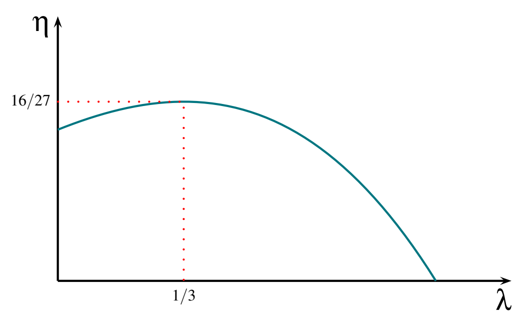
La puissance récupérée par l'éolienne est $P_e = \Delta pAU$.

vii. L'efficacité de l'éolienne est donnée par

$$\eta = \frac{P_w}{P_e} = \frac{\Delta pAU}{\frac{1}{2}\rho U_1^3 A} = \frac{\rho(U_1^2 - U_2^2)U}{\rho U_1^3} = \frac{(U_1^2 - U_2^2)(U_1 + U_2)}{2U_1^3} = \frac{1}{2}(1-\lambda^2)(1+\lambda)$$

où on a posé $\lambda = U_2/U_1$.

viii. Les variations de l'efficacité avec le rapport λ sont représentées sur le schéma ci-dessous



Ceci montre que l'efficacité théorique maximale est de 16/27. Dès lors, la puissance maximale pouvant être récupérée par une éolienne de section A plongée dans un vent soufflant à la vitesse U_1 est

$$P_{w,max} = \frac{8}{27}\rho AU_1^3$$

Question IV

i. *Décrivez qualitativement l'écoulement sur les différentes sections de l'aile.*
De par la géométrie de l'aile et son angle d'attaque, deux détentes successives se produisent sur l'extrados (au bord d'attaque et à mi-corde) et un choc se produit au bord d'attaque, du coté de l'intrados. Au travers des détentes, l'écoulement est accéléré et la pression et la température statiques chutent. Le contraire se produit au travers d'un choc. Vu cette configuration, la pression sur l'intrados est plus forte que la pression sur l'extrados et l'aile génère donc une portance.

ii. *Calculez la pression agissant sur les différentes sections de l'aile.*
La pression sur les différentes sections est calculée en utilisant la théorie de Prandtl-Meyer pour les détentes et la théorie des chocs obliques pour les chocs. Ce faisant, les rapports entre la pression statique sur chaque section et la pression en amont de l'aile sont déterminées.

- Extrados : bord d'attaque – mi-corde
La détente se produit suite à une déflexion $\delta_1 = -2°$. En utilisant la théorie de Prandtl-Meyer, le nombre de Mach sur cette section et le rapport de pression statique sur pression totale associé sont déterminés. Avec les tables pour les écoulements compressibles, il vient

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \nu(\mathrm{M}_\infty) - \nu(\mathrm{M}_1) \\ \nu(\mathrm{M}_1) &= \nu(\mathrm{M}_\infty) - \delta_1 \\ &= 39.124° + 2° \\ &= 41.124° \end{aligned}$$

Le nombre de Mach associé est $\mathrm{M}_1 = 2.59$, ce qui correspond à un rapport de pression $p_1/p_{t_1} = 0.0509$
Comme la pression totale est conservée au travers d'une détente, la pression sur cette section s'écrit finalement $p_1 = \frac{p_1}{p_{t_1}} p_{t_\infty}$, où p_{t_∞} sera calculé par la suite.

- Extrados : mi-corde – bord de fuite
La détente se produit ici suite à une déflexion $\delta_2 = -8°$. De la même manière que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \nu(\mathrm{M}_2) &= \nu(\mathrm{M}_1) - \delta_2 \\ &= 41.124° + 8° \\ &= 49.124° \end{aligned}$$

Le nombre de Mach sur cette section est $\mathrm{M}_2 = 2.97$ et le rapport de pression est $p_2 = p_2/p_{t_2} = 0.02848$. La pression statique peut donc être calculée avec $p_2 = (p_2/p_{t_2})p_{t_\infty}$.

- Intrados
Sur cette section, la pression est calculée en utilisant la théorie des chocs obliques. L'angle de choc est donc d'abord calculé pour utiliser ensuite la théorie des chocs normaux afin de calculer la modification de pression. En utilisant les graphes, l'angle de choc θ_3 est déterminé sur base du nombre de Mach amont $\mathrm{M}_\infty = 2.5$ et de la déflexion $\delta_3 = 6°$. Ce faisant, $\theta_3 = 28.5°$ est obtenu. L'écoulement est alors décomposé en une partie normale et une partie tangentielle au choc telles que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\infty,n} &= \mathrm{M}_\infty \sin\theta_3 \; = \; 1.1929 \\ \mathrm{M}_{\infty,t} &= \mathrm{M}_\infty \cos\theta_3 \; = \; 2.1980 \end{aligned}$$

En utilisant $\mathrm{M}_{\infty,n}$ et la théorie des chocs normaux, le rapport des pressions statiques après et avant le choc est directement déterminé et il vient $p_3/p_\infty = 1.485$ puis $p_3 = p_3/p_\infty \times p_\infty$. Pour pouvoir calculer les pressions statiques sur toutes les sections, la pression totale de l'écoulement amont doit être connue. Elle est donc calculée en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot. Vu $\mathrm{M}_\infty = 2.5$ et $p_\infty = 60$ kPa, la pression totale est finalement $p_{t_\infty} = 1.0251$ MPa. Ceci étant connu, les pressions statiques sur les trois sections sont

$$\begin{aligned} p_1 &= 54.178 \text{ kPa} \\ p_2 &= 29.195 \text{ kPa} \\ p_3 &= 89.100 \text{ kPa} \end{aligned}$$

iii. *Calculez les coefficients de portance et de trainée.*

Les coefficients de portance et de trainée s'écrivent respectivement

$$c_L = \frac{L}{^1/_2 \rho_\infty V_\infty^2 c} \quad \text{et} \quad c_D = \frac{D}{^1/_2 \rho_\infty V_\infty^2 c},$$

où L est la portance, D est la trainée et c est la corde de l'aile, soit la base du triangle. La portance et la trainée sont la projection dans les axes du vent (respectivement sur l'axe perpendiculaire et parallèle à M_∞) de la force résultant de la différence des pressions sur l'intrados et l'extrados. Ainsi, en définissant l comme la longueur des sections de l'extrados, il vient

$$L = -p_1 l \cos(\alpha - \theta) - p_2 l \cos(\alpha + \theta) + p_3 c \cos \alpha$$
$$D = -p_1 l \sin(\alpha - \theta) - p_2 l \sin(\alpha + \theta) + p_3 c \sin \alpha$$

En utilisant la trigonométrie, les longueurs des sections de l'extrados peuvent être exprimées en fonction de celle de l'intrados comme $l = c/(2\cos\theta)$. Après calculs, il vient

$$L = 48.064c \text{ kN/m} \quad \text{et} \quad D = 5.86c \text{ kN/m}.$$

Finalement, pour pouvoir calculer les coefficients, il faut déterminer ρ_∞ et V_∞. Ils peuvent être calculés en utilisant la loi des gaz parfaits et la définition du nombre de Mach,

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{RT_\infty} = 0.804 \text{ kg/m}^3$$
$$V_\infty = M_\infty a_\infty = M_\infty \sqrt{\gamma R T_\infty} = 808.04 \text{ m/s}$$

Une fois ces valeurs connues, la valeur numérique des coefficients aérodynamiques sont

$$c_L = 0.1831 \quad \text{et} \quad c_D = 0.0223.$$