LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2021

MECA0025-1 - MÉCANIQUE DES FLUIDES
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.
Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Définissez la vorticité. Explicitez la signification des différents termes de l'équation de la vorticité et reliez ceux-ci aux hypothèses utilisées pour établir la forme forte de l'équation de Bernoulli.

On donne :

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right)=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla\times\mathbf{f}+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p+\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$

Question II

Comparez les simulations RANS, DNS et LES.

Expliquez les développements ci-dessous permettant d'estimer la dépendance de la charge de calcul d'une simulation DNS en fonction du nombre de Reynolds.

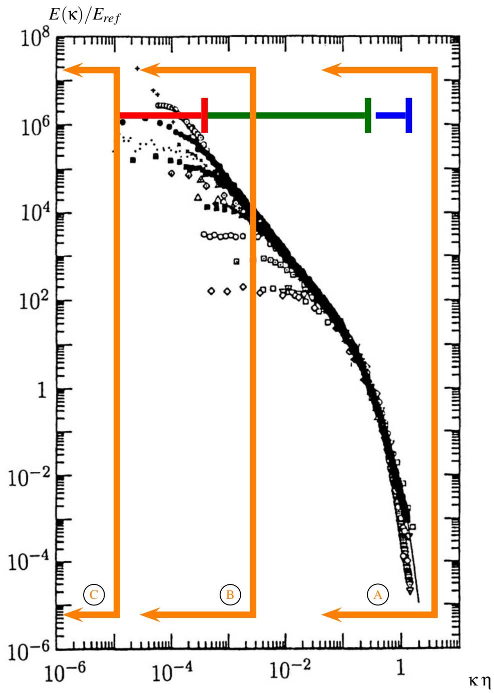
$$N_x\Delta\sim\ell_0,\quad \Delta\sim\eta\sim\ell_0\ Re^{-3/4}$$

$$\Rightarrow N_x^3\ \sim\ Re^{9/4},\quad \left(\frac{\eta}{\ell_0}\right)^3=Re^{-9/4}$$

$$\Delta t\sim\frac{\Delta}{u_0},\ \mathcal{T}\sim\ell/u_0$$

$$\Rightarrow N_t=\frac{\mathcal{T}}{\Delta t}\propto\frac{\ell_0}{u_0}\frac{u_0}{\Delta}\sim\frac{\ell_0}{\eta}\sim Re^{3/4}$$

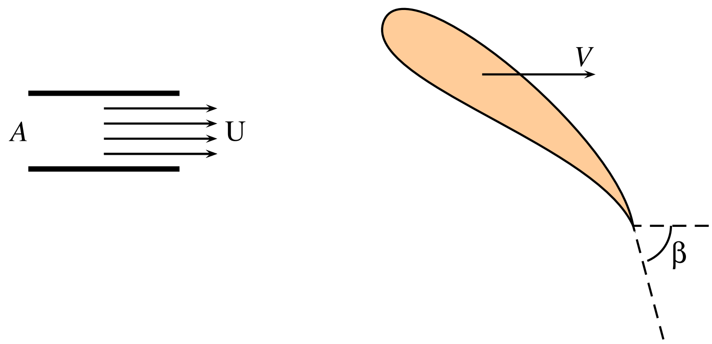
$$N_x^3N_t\propto Re^3$$



Question III

On considère un flux d'air – considéré comme incompressible et non visqueux – sortant à la vitesse U d'une tuyère horizontale de section A. Le flux d'air vient frapper une aube de turbine se déplaçant horizontalement à la vitesse constante V et s'en trouve ainsi dévié vers le bas. L'air quitte l'aube avec une vitesse *relative* par rapport à l'aube présentant un angle β avec l'horizontale.

On étudie le régime stationnaire. Le système est installé dans un espace non confiné où règne la pression atmosphérique. On néglige les forces en volume au sein du fluide.



i. Montrez que la norme de la vitesse relative de l'air incident par rapport à l'aube est égale à la norme de la vitesse relative de l'air quittant l'aube.

ii. Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est au repos ($V = 0$).

iii. Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est en mouvement à la vitesse horizontale $V > 0$.

iv. Déterminez la puissance développée par la force exercée par le fluide sur l'aube.

Question IV

Soit un réservoir de grandes dimensions contenant de l'air au repos à une température de 600 K et une pression de 3 atm. L'air s'échappe via une tuyère convergenge-divergente dimensionnée pour assurer un flux de 1 kg/s vers l'extérieur, où règne la pression atmosphérique. L'écoulement de sortie est supersonique mais aucun choc n'apparaît dans la tuyère. Un tube de Pitot est disposé dans la section de sortie pour mesurer la vitesse à cette endroit.

i. Décrivez qualitativement l'évolution de la pression, de la température et du nombre de Mach dans la tuyère.

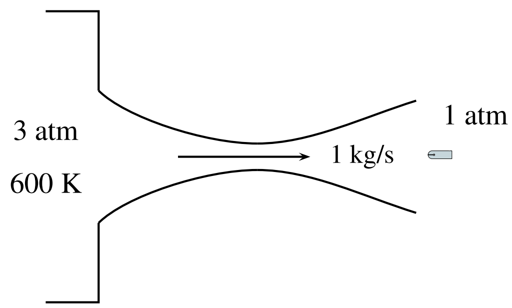
ii. Déterminez

   (a) le nombre de Mach de sortie ;

   (b) la vitesse de l'air à la sortie de la tuyère ;

   (c) la section du col ;

   (d) les deux mesures de pression relevées par le tube de Pitot.



L'air est assimilé à un gaz parfait dont les propriétés sont $R = 287$ *J/(kg · K)*, $\gamma = 1.4$. *Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.*

SOLUTION TYPE

Question I

Cf. support du cours théorique.

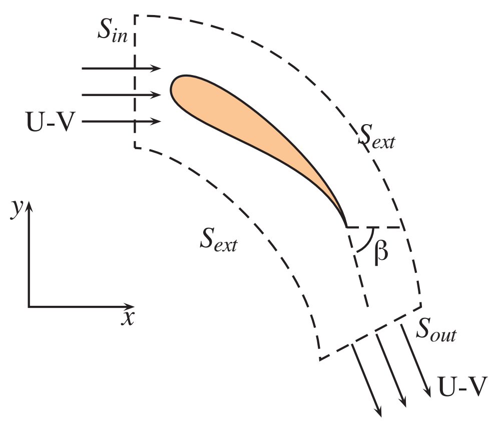
Question II

Cf. support du cours théorique.

Question III

i. *Montrez que la norme de la vitesse relative de l'air incident par rapport à l'aube est égale à la norme de la vitesse relative de l'air quittant l'aube.*

Le volume de contrôle (en mouvement à la vitesse $V\mathbf{e}_x$ de l'aube), représenté ci-contre, est défini de telle sorte que l'écoulement entre dans le volume de contrôle par la frontière S_{in} et en sort par S_{out}.Les frontières S_{ext} coïncident avec des lignes de courant. On note S_{tot} la frontière totale du volume de contrôle.



Avec les hypothèses faites ici (air incompressible, non-visqueux et régime stationnaire), Bernoulli peut être appliqué sur une ligne de courant passant par l'entrée et la sortie du volume de contrôle. Cela donne (gravité négligée),

$$p_{in} + \frac{1}{2}\rho\|V_{in}\|^2 = p_{out} + \frac{1}{2}\rho\|V_{out}\|^2$$

Comme la pression sur S_{in} et S_{out} est égale à la pression atmosphérique, l'égalité des vitesses relatives avant et après déviation est démontrée.

ii. *Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est au repos ($V = 0$).*

Si on suppose que l'aube est seulement responsable d'une déviation de la vitesse et la norme de la vitesse étant inchangée (point i.), le bilan de masse s'écrit, en régime stationnaire,

$$\int_{S_{tot}} \rho(\mathbf{u}.\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot} = 0$$
$$-\rho V_{in}S_{in} + \rho V_{in}S_{out} = 0$$

Les surfaces par lesquelles le fluide entre et sort du volume de contrôle sont donc identiques et $S_{in} = S_{out} = A$.

Vu les hypothèses (non-visqueux, pas de force volumique et stationnaire), le bilan de quantité de mouvement s'écrit,

$$\int_{S_{tot}} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}.\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot} = -\int_{S_{tot}} p\mathbf{n}\mathrm{d}S_{tot} + \mathrm{F}^{a\to f}$$

où $\mathrm{F}^{a\to f}$ est la force (extérieure) exercée par l'aube sur le fluide. La pression sur la surface Stot étant partout égale à la pression atmosphérique, le terme contenant l ?intégrale de la pression est nul puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une constante sur une surface fermée. La force exercée par le fluide sur l'aube s'écrit donc,

$$\mathrm{F}^{f\rightarrow a} = -\int_{S_{tot}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}.\mathbf{n})\mathrm{d}S_{tot}$$

ce qui donne, selon x et y,

$$\begin{aligned} F_x^{f\rightarrow a} &= \rho V_{in}^2 A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\rightarrow a} &= \rho V_{in}^2 A \sin\beta \end{aligned}$$

Dans le cas où l'aube est statique, les résultats obtenus précédemment sont particularisés au cas où $V = 0$ ($V_{in} = U$). Il vient donc, ce qui donne, selon x et y,

$$\begin{aligned} F_x^{f\rightarrow a} &= \rho U^2 A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\rightarrow a} &= \rho U^2 A \sin\beta \end{aligned}$$

iii. *Déterminez l'expression de la force exercée par le fluide sur l'aube dans le cas où celle-ci est en mouvement à la vitesse horizontale $V > 0$.*

Dans ce cas général, $V_{in} = U - V$, d'où,

$$\begin{aligned} F_x^{f\rightarrow a} &= \rho(U-V)^2 A(1-\cos\beta) \\ F_y^{f\rightarrow a} &= \rho(U-V)^2 A \sin\beta \end{aligned}$$

iv. *Déterminez la puissance développée par la force exercée par le fluide sur l'aube.*

La puissance développée s'écrit,

$$P = \mathrm{F}^{f\rightarrow a}.\mathrm{V}$$

L'aube se déplaçant horizontalement selon $V\mathbf{e}_x$, il vient

$$P(V) = F_x^{f\rightarrow a} V = \rho V(U-V)^2 A(1-\cos\beta)$$

Question IV

i. *Décrivez qualitativement l'évolution de la pression, de la température et du nombre de Mach dans la tuyère.*

Pour avoir un écoulement supersonique dans la section d'essai, il faut accélérer l'écoulement tout le long de la tuyère. On a donc un écoulement subsonique dans le convergent et supersonique dans le divergent. Le col est sonique puisqu'il s'agit de la section minimale. La température totale T_0 est conservée et est égale à la température dans le réservoir, puisque la vitesse y est nulle. De plus, comme il n'y a pas de choc, la pression totale p_0 est également conservée et est égale à la pression dans le réservoir. De même, la section sonique est conservée. La pression et la température statiques diminuent le long de la tuyère.

ii. *Déterminez*

(a) *le nombre de Mach de sortie ;*

Connaissant la pression à la sortie p_s et la pression totale, on évalue le rapport $p_s/p_0 = 0.2$. Avec les tables, on relève que ces conditions correspondent à,

$$M_s = 1.36, \quad \frac{A_s}{A^*} = 1.094 \quad et \quad \frac{T_s}{T_0} = 0.73$$

(b) *la vitesse de l'air à la sortie de la tuyère ;*

La vitesse de l'air à la sortie se calcule avec la vitesse du son $a_s = \sqrt{\gamma R T_s}$ avec $T_s = \frac{T_s}{T_0} T_0 = 0.73 \times 600\ \mathrm{K} = 438\ \mathrm{K}$.

$$V_s = M_s\sqrt{\gamma R T_s} = 570.53\ \mathrm{m/s}$$

(c) *la section du col ;*

La section du col peut être déterminée via la section de sortie avec $A^* = \frac{A^*}{A_s}A_s$.
Pour déterminer la section du sortie, le débit massique est utilisé.

$$Q_m = M_S A_s p_s \sqrt{\frac{\gamma}{RT_s}}$$

De là, on obtient la section de sortie,

$$A_s = \frac{Q_m}{M_s p_s}\sqrt{\frac{RT_s}{\gamma}} = 21.74 \text{ cm}^2$$

$$A^* = \frac{A^*}{A_s}A_s = 19.87 \text{ cm}^2$$

(d) *les deux mesures de pression relevées par le tube de Pitot.*

Le tube de Pitot mesure le rapport entre la pression statique dans l'écoulement et la pression totale (choc détaché devant le tube), noté "$\frac{p_1}{p_{0_2}}$" dans les tables. Pour $M_s = 1.36$, $\frac{p_1}{p_{0_2}} = 0.3435$. La pression statique $p_1 = p_s = 1$ atm et la pression totale $p_{Pitot} = p_{0_2} = p_1\frac{p_{0_2}}{p_1} = \frac{1}{0.3435} = 2.91$ atm.