

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.

*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*

Rendez le questionnaire et le carton avec vos copies.

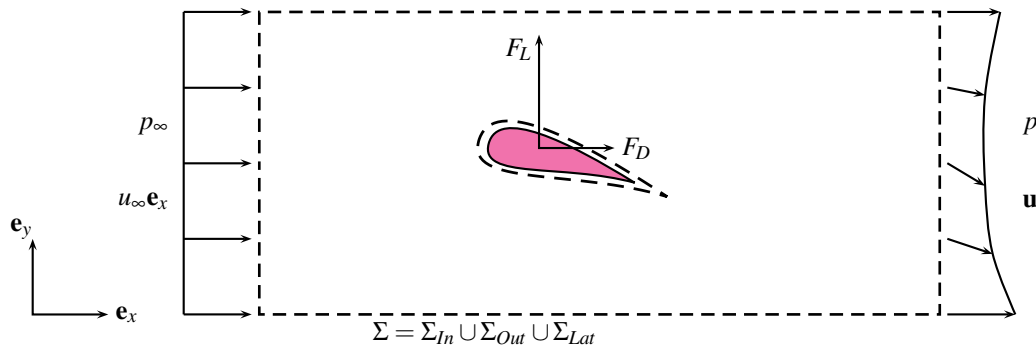
Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Par application de la forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement, établissez l'expression des forces agissant sur un obstacle plongé dans un écoulement.

Expliquez en particulier les hypothèses éventuelles, les concepts, les notations utilisées, l'origine des équations, le raisonnement suivi et les implications/interprétations. Les développements mathématiques complets permettant de passer d'une équation à l'autre ne sont pas attendus.

On donne :



$$\begin{cases} F_D = (p_\infty + \rho u_\infty^2) A_{in} - \int_{\Sigma_{out}} (p + \rho u_x^2) dA \\ F_L = - \int_{\Sigma_{out}} \rho u_x u_y dA \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_A \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA$$

$$\int_A \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = -\rho u_\infty^2 A_{in} \mathbf{e}_x + \int_{\Sigma_{out}} \rho u_x \mathbf{u} dA + \mathbf{0}$$

$$\int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA = p_\infty A_{in} \mathbf{e}_x - \int_{\Sigma_{out}} p \mathbf{e}_x dA - F_D \mathbf{e}_x - F_L \mathbf{e}_y$$

Question II

Déterminez les équations décrivant la dynamique des ondes de gravité. Décrivez les caractéristiques principales de celles-ci.

Expliquez en particulier les hypothèses éventuelles, les concepts, les notations utilisées, l'origine des équations utilisées, le raisonnement suivi et les implications/interprétations. Les développements mathématiques complets permettant de passer d'une équation à l'autre ne sont pas attendus.

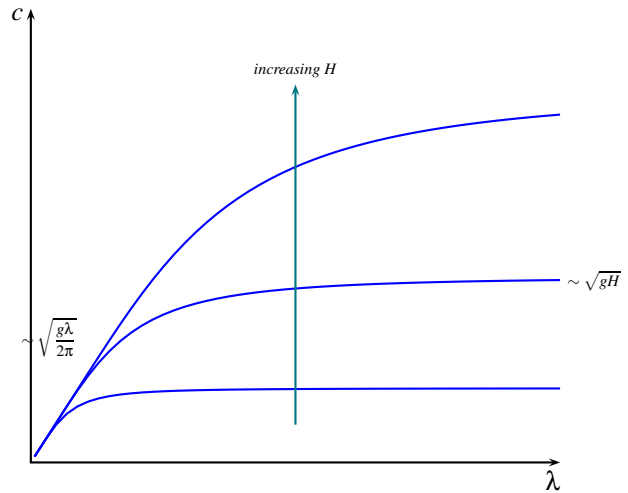
On donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\eta = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(x,t) = a \cos(kx - \omega t) \\ u = a\omega \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{sh } kH} \cos(kx - \omega t) \\ w = a\omega \frac{\text{sh } k(z+H)}{\text{sh } kH} \sin(kx - \omega t) \\ \omega = \sqrt{gk \text{th } kH} \end{array} \right.$$

- $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th } kH} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \text{th } \frac{2\pi H}{\lambda}}$

- $p' = \rho g a \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \cos(kx - \omega t)$

- $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\text{sh } 2kH} \right)$



$$E_k = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-H}^\eta \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz dx \approx \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-H}^0 \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz dx = \frac{1}{4} \rho g a^2$$

$$E_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left[\int_{-H}^\eta \rho g z dz - \int_{-H}^0 \rho g z dz \right] dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\eta \rho g z dz dx = \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} = \frac{1}{4} \rho g a^2$$

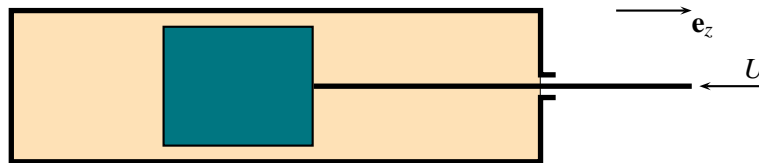
Question III

Un amortisseur hydraulique ('dashpot') est un dispositif permettant d'absorber et d'amortir les vibrations mécaniques d'une machine ou les mouvements de celle-ci communiqués via un piston. Le piston se déplace dans un cylindre dont le diamètre est légèrement supérieur à celui du piston (de section également cylindrique). Le cylindre est rempli d'un fluide très visqueux. Lorsque le piston se déplace, sous l'effet d'une force F , l'huile se déplace dans l'espace compris entre le cylindre et le piston. Les tensions visqueuses s'exerçant sur le piston s'opposent ainsi à F et permettent de freiner le mouvement.

On note R le rayon du cylindre. L'extrémité du piston est un cylindre de rayon $R - a$ et de longueur ℓ . Au repos, le fluide contenu dans le piston est à la pression p_0 uniforme. On néglige la pesanteur. On suppose que le fluide est Newtonien, de viscosité cinématique ν et de masse volumique ρ constantes.

On considère le mouvement du fluide dans l'espace entre le piston et le cylindre dans le cas où le piston se déplace à la vitesse constante U (avec $U > 0$) vers la gauche. L'espace entre le cylindre et le piston étant très petit, on décrit cet écoulement en coordonnées cartésiennes.

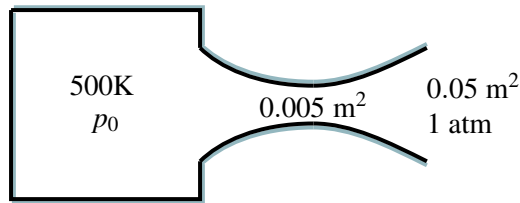
On suppose que cet écoulement est laminaire, stationnaire, pleinement développé et ne comporte aucune composante azimuthale (*i.e.* selon \mathbf{e}_θ). Le fluide est supposé au repos de part et d'autre du piston.



- i. Écrivez les équations différentielles décrivant l'écoulement entre le piston et le cylindre en coordonnées cartésiennes.
- ii. En utilisant les équations écrites en i., montrez que la vitesse radiale est nulle.
- iii. En utilisant les équations écrites en i., montrez qu'un gradient de pression longitudinal constant $\nabla p = -K\mathbf{e}_z$ se développe entre le piston et le cylindre.
- iv. Déterminez la distribution de la vitesse du fluide dans l'espace entre le cylindre et le piston en fonction de K et des paramètres du problème.
- v. Par un bilan de masse, montrez que $K \sim \frac{6\mu UR}{a^3}$.
- vi. Déterminez la force de résistance F exercée par le fluide sur le mouvement du piston et montrez que cette force peut s'écrire sous la forme habituelle $F = cU$ où c désigne le coefficient d'amortissement c du dash-pot.

Question IV

Un avion supersonique est équipé d'un turbopropulseur qui éjecte vers l'arrière des gaz de combustion via une buse de Laval (convergent-divergent). Dans la chambre de combustion, les gaz sont à la température de 500 K et à une pression p_0 . La section de sortie est de 0.05 m^2 et débouche dans l'air à la pression atmosphérique. La section au niveau du col est de 0.005 m^2 .



- Déterminez la gamme des pressions p_0 permettant d'éviter tout choc dans et en-dehors de la tuyère. Que vaut alors le nombre de Mach à la sortie de la tuyère ?
- Déterminez le débit maximum d'air pouvant s'écouler dans la tuyère dans les conditions identifiées au point i ainsi que la poussée correspondante.
- Dans le cadre d'un dysfonctionnement, on constate que le turbopropulseur ne fonctionne pas avec les valeurs nominales prévues mais qu'un choc droit apparaît dans la section du divergent présentant une aire $A_c = 0.025 \text{ m}^2$. Esquissez les variations de T , p et M dans la tuyère en faisant apparaître les valeurs numériques permettant de caractériser complètement ces distributions.

L'air est assimilé à un gaz parfait dont les propriétés sont $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, $\gamma = 1.4$, $c_p = 1005 \text{ m}^2/\text{s}^2/\text{K}$ et $c_v = 718 \text{ m}^2/\text{s}^2/\text{K}$. Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

Question I

Cf cours théorique.

Question II

Cf cours théorique.

Question III

i. Écrivez les équations différentielles décrivant l'écoulement entre le piston et le cylindre en coordonnées cartésiennes.

L'espace entre le piston et le cylindre étant très petit par rapport au rayon du dispositif, on décrit l'écoulement en coordonnées cartésiennes avec les notations et axes décrits ci-dessous



On suppose par ailleurs que

- $\rho = \text{cst}$ (écoulement incompressible);
- μ la viscosité dynamique est constante;
- $g = 0$ (pas d'effet gravitationnel);
- $\partial_z \cdot = 0$ (écoulement pleinement développé.);
- $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_z + v\mathbf{e}_r$ (pas d'écoulement azymuthal).

Dans les hypothèses énoncées, l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

La projection de l'équation de quantité de mouvement sur \mathbf{e}_z et \mathbf{e}_r conduit quant à elle à

$$\begin{cases} v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \end{cases} \quad (\dagger)$$

ii. En utilisant les équations écrites en i., montrez que la vitesse radiale est nulle.

En intégrant l'équation de conservation de la masse, on a

$$v = C,$$

avec C une constante. Au vu des conditions aux limites $v(R - a) = v(r) = 0$, il vient donc

$$v = 0$$

- iii. En utilisant les équations écrites en i., montrez qu'un gradient de pression longitudinal constant $\nabla p = -K\mathbf{e}_z$ se développe entre le piston et le cylindre .

Par hypothèse, l'écoulement ne comporte aucune composante selon \mathbf{e}_θ . Par conséquent, $\partial_\theta p = 0$. Étant donné que $v = 0$, l'équation de quantité de mouvement selon \mathbf{e}_r se réduit à

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

On en déduit donc que p ne peut être qu'une fonction de z . L'équation de quantité de mouvement selon \mathbf{e}_z lorsque $v = 0$ est donnée par

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

Étant donné que le membre de droite de l'équation précédente ne dépend que de r , et que le membre de gauche ne dépend que de z , cela signifie que

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = -K \\ \mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -K \end{cases}$$

avec K une constante. Par conséquent, le gradient longitudinal de pression est donné par

$$\nabla p = -K\mathbf{e}_z$$

- iv. Déterminez la distribution de la vitesse du fluide dans l'espace entre le cylindre et le piston en fonction de K et des paramètres du problème.

En repartant de la première des équations (†), on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{K}{\mu}$$

En intégrant deux fois par rapport à r , on obtient

$$u(r) = -\frac{K}{2\mu}r^2 + Ar + B$$

où A et B sont des constantes. Étant donné que la vitesse s'annule au niveau de la paroi supérieure et vaut $-U$ à la paroi du cylindre central, les conditions aux limites se traduisent comme suit:

$$\begin{cases} u(R) = -\frac{K}{2\mu}R^2 + AR + B = 0 \\ u(R-a) = -\frac{K}{2\mu}(R-a)^2 + A(R-a) + B = -U \end{cases}$$

Résoudre ce système donne

$$\begin{cases} A = \frac{U}{a} + \frac{K}{2\mu}(2R-a) \\ B = -\frac{K}{2\mu}(R^2 - aR) - \frac{U}{a}R \end{cases}$$

Le profil de vitesse est donc donné par

$$u(r) = -\frac{K}{2\mu}r^2 + \left[\frac{U}{a} + \frac{K}{2\mu}(2R-a) \right] r - \frac{K}{2\mu}(R^2 - aR) - \frac{U}{a}R$$

qui peut se factoriser comme

$$u(r) = (r-R) \left[\frac{U}{a} - \frac{K}{2\mu}(r+a-R) \right]$$

v. Par un bilan de masse, montrez que $K \sim \frac{6\mu UR}{a^3}$.

Par conservation de la masse, le volume de fluide déplacé par le cylindre par unité de temps doit être égal au débit qui passe de chaque côté du cylindre. Par conséquent,

$$\pi UR^2 = \int_{A_\varepsilon} u dA_\varepsilon \quad (\ddagger)$$

où A_ε désigne l'aire de la surface annulaire comprise entre les cylindres. On a

$$\int_{A_\varepsilon} u dA_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{R-a}^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{R-a}^R u(r) r dr$$

Dans le cadre de l'approximation en coordonnées cartésiennes de la géométrie introduite pour tenir compte de $a \ll R$, on peut aussi écrire

$$\int_{A_\varepsilon} u dA_\varepsilon \approx 2\pi R \int_{R-a}^R u(r) dr$$

où

$$\begin{aligned} \int_{R-a}^R u(r) dr &= \int_{R-a}^R (r-R) \left[\frac{U}{a} - \frac{K}{2\mu}(r+a-R) \right] dr \\ &= \int_0^a (t-a) \left[\frac{U}{a} - \frac{K}{2\mu}t \right] dt \quad \text{où on a posé } t = r - R + a \\ &= -\frac{aU}{2} + \frac{Ka^3}{12\mu} \end{aligned}$$

L'égalité des débits (\ddagger) s'écrit donc

$$\pi R^2 U = 2\pi R \left[\frac{-aU}{2} + \frac{Ka^3}{12\mu} \right]$$

Par conséquent, en isolant K , on a

$$K = \frac{6U(R+a)\mu}{a^3} \sim \frac{6UR\mu}{a^3}, \quad (a \rightarrow 0) \quad (\spadesuit)$$

vi. Déterminez la force de résistance F exercée par le fluide sur le mouvement du piston et montrez que cette force peut s'écrire sous la forme habituelle $F = cU$ où c désigne le coefficient d'amortissement c du dash-pot.

La force de résistance totale exercée par le fluide à l'encontre du mouvement du cylindre est due, d'une part, aux tensions visqueuses s'exerçant sur la surface latérale du piston et, d'autre part, à la différence de pression entre les faces avant et arrière du piston. Physiquement, on se convainc aisément du fait que les forces résultantes correspondantes sont toutes deux opposées au mouvement du piston, et donc orientée selon \mathbf{e}_z dans le cas considéré.

La résultante des tensions visqueuses s'exerçant au niveau de la paroi latéral du cylindre est donnée par

$$F_\mu = 2\pi(R-a)\ell \tau_{rz} \Big|_{r=R-a} = 2\pi(R-a)\ell \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R-a}$$

Puisque

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R-a} = \left(\frac{Ka}{2\mu} + \frac{U}{a} \right)$$

il vient

$$F_\mu = 2\pi(R-a)\ell \left(\frac{Ka}{2} + \frac{\mu U}{a} \right)$$

Puisque la différence de pression entre les deux faces du cylindre est de $K\ell$ (la pression étant supérieure du côté gauche), la résultante des forces de pression est donnée quant à elle par

$$F_p = \pi(R-a)^2 K\ell$$

La force de résistance totale au mouvement du cylindre est donnée par

$$F_{tot} = F_{\mu} + F_p = 2\pi(R-a)\ell \left(\frac{Ka}{2} + \frac{\mu U}{a} \right) + \pi(R-a)^2 K \ell$$

En négligeant a devant R et en remplaçant K par sa valeur (♠) obtenue plus haut, il vient

$$F_{tot} \approx \pi R \ell \left(KR + \frac{2\mu U}{a} \right) = \pi R \ell \left(\frac{6UR^2\mu}{a^3} + \frac{2\mu U}{a} \right)$$

où le second terme est négligeable par rapport au premier. La contribution des tensions visqueuses sur les parois latérales du piston est donc négligeable par rapport à la résultante des forces de pression s'exerçant sur les surfaces avant et arrière et on a

$$F_{tot} \sim \frac{6\pi l R^3 \mu}{a^3} U, \quad (a \rightarrow 0)$$

On a donc prouvé que $F = cU$, où c est une constante telle que

$$c \sim \frac{6\pi l R^3 \mu}{a^3}, \quad (a \rightarrow 0)$$

Question IV

- i. Déterminez la gamme des pressions p_0 permettant d'éviter tout choc dans et en-dehors de la tuyère. Que vaut alors le nombre de Mach à la sortie de la tuyère ?

Afin d'éviter tout choc dans la tuyère, deux cas sont possibles:

- (a) L'écoulement est sous-sonique partout dans la tuyère. Ce cas va donner une pression p_0 maximale au-delà de laquelle l'écoulement devient supersonique dans le divergent. Si le régime n'est pas adapté, il y a apparition d'un choc. A cette limite, le nombre de mach au col est $M_c = 1$.
- (b) L'écoulement est supersonique dans le divergent pour une certaine pression p_0 , mais le régime est adapté. Il n'y a donc pas de choc. Là aussi, $M_c = 1$.

Dans les deux cas, $M_c = 1$ et donc $A_c = A^* = 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$. Comme il n'est pas supposé y avoir de choc dans la tuyère, A^* est conservée. Par conséquent, $A_s/A^* = 10$, ce qui correspond dans les tables à soit $M_s = 0.06$ ou $M_s = 3.93$, qui correspondent respectivement aux cas (a) et (b).

Etant donné que dans les deux cas il n'y a pas de choc, la pression totale est conservée partout dans la tuyère, et vaut p_0 . Dans les tables, on a

- (a) pour $M_s = 0.06$, $p_s/p_0 = 0.9975$, et donc

$$p_0 = \frac{p_s}{0.9975} = \frac{1 \text{atm}}{0.9975} = 1.003 \text{atm}.$$

- (b) pour $M_s = 3.93$, $p_s/p_0 = 0.007233$, et donc

$$p_0 = \frac{p_s}{0.007233} = \frac{1 \text{atm}}{0.007233} = 138 \text{atm}.$$

Par conséquent, tout choc est évité pour $p_0 \leq 1.003 \text{atm}$ ou si $p_0 = 138 \text{atm}$

- ii. Déterminez le débit maximum d'air pouvant s'écouler dans la tuyère dans les conditions identifiées au point i ainsi que la poussée correspondante.

Le débit maximum est obtenu lorsque l'écoulement est supersonique dans le divergent et le régime est adapté, ce qui correspond au cas (b) du point i. Le débit est donné par

$$Q_m = \rho_s A_s u_s = \rho_s A_s M_s a_s$$

avec a_s la vitesse du son en sortie, donnée par

$$a_s = \sqrt{\gamma R T_s}$$

Dans les tables, on trouve pour $M_s = 3.93$ que $T_s/T_t = 0.2446$. Etant donné que la température totale T_s est conservée partout, $T_t = T_0$ et donc $T_s = 0.2446 T_t = 122.3 \text{K}$. Par conséquent, $a_s = 221.68 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Enfin, par la loi des gaz parfaits,

$$\rho_s = \frac{p_s}{R T_s} = \frac{101325}{287 \cdot 122.3} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = 2.887 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Le débit est donc donné par

$$Q_m = 125.75 \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

La poussée est donnée par le débit de quantité de mouvement, définie par

$$P = Q_p = Q_m u_s = \rho_s A_s (M_s a_s)^2 = 1.096 \cdot 10^5 \text{N}$$

- iii. Dans le cadre d'un dysfonctionnement, on constate que le turbopropulseur ne fonctionne pas avec les valeurs nominales prévues mais qu'un choc droit apparaît dans la section du divergent présentant une aire $A_c = 0.025 \text{ m}^2$. Esquissez les variations de T , p et M dans la tuyère en faisant apparaître les valeurs numériques permettant de caractériser complètement ces distributions.

Etant donné qu'il y a apparition d'un choc dans le divergent, cela signifie que le nombre de Mach après le col et avant le choc est supérieur à 1. Par conséquent, $M_c = 1$ et donc $A_1^* = A_c = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Au niveau du col, on a dans les tables (la température totale est conservée)

$$\frac{T_c}{T_t} = 0.8333 \Rightarrow T_c = 416.65\text{K} \quad \frac{p_c}{p_t} = 0.5283$$

L'aire critique étant conservée jusqu'au choc, on a

$$\frac{A_{choc}}{A_1^*} = \frac{2.5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} = 5.$$

Dans les tables, cela correspond à un Mach super sonique $M_{choc,1} = 3.17$, auquel on associe les rapports de température et de pression suivants

$$\frac{T_1}{T_t} = 0.3323 \Rightarrow T_1 = 166.15\text{K} \quad \frac{p_1}{p_{t,1}} = 0.002114 \quad \frac{p_2}{p_1} = 11.56$$

Juste après le choc, $M_{choc,2} = 0.4659$, et l'aire critique est modifiée. On trouve dans les tables que

$$\frac{A_{choc}}{A_2^*} = 1.4018 \Rightarrow A_2^* = 1.783 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \quad \frac{T_2}{T_t} = 0.9577 \Rightarrow T_2 = 478.85\text{K} \quad \frac{p_2}{p_{t,2}} = 0.8596$$

L'aire critique étant conservée entre le choc et la sortie, on a

$$\frac{A_s}{A_2^*} = \frac{0.05}{0.01783} = 2.804.$$

Après le choc, $M_{choc,2} < 1$, et comme la tuyère est divergente dans cette région, $M_s < 1$. Dans les tables, le rapport de l'aire de sortie à l'aire critique correspond donc à $M_s = 0.21$. Les rapports de température et pression associés sont (la température totale est conservée dans toute la tuyère malgré le choc)

$$\frac{p_s}{p_{t,s}} = 0.9697 \Rightarrow p_{t,s} = 1.031 \text{ atm} \quad \frac{T_s}{T_t} = 0.9913 \Rightarrow T_s = 495.65\text{K}$$

Sachant que la pression totale est conservée entre le choc et la sortie, on a

$$p_2 = \frac{p_2}{p_{t,2}} \frac{p_{t,2}}{p_s} p_s = \frac{p_2}{p_{t,2}} \frac{p_{t,s}}{p_s} p_s = 0.8865 \text{ atm}$$

Afin de déterminer p_1 , on peut utiliser le ratio des pressions de part et d'autres du choc,

$$p_1 = \frac{p_1}{p_2} p_2 = 0.07669 \text{ atm}$$

Enfin, comme la pression totale est conservée entre le réservoir et le choc, on peut déterminer p_0 et p_c comme suit

$$p_0 = p_{t,1} = \frac{p_1}{0.002114} = 36.28 \text{ atm}$$

$$p_c = 0.5283 p_{t,c} = 0.5283 p_0 = 19.17 \text{ atm}$$

Une esquisse des profils de température, pression et mach le long de la tuyère est donnée ci-après. Notons que les échelles ne sont pas respectées.

