LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2022

MECA0025-1 - MÉCANIQUE DES FLUIDES
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire et le carton avec vos copies.
Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Dérivez l'équation générale pour la vorticité et explicitez la signification des différents termes. Reliez ceux-ci aux hypothèses utilisées pour établir la forme forte de l'équation de Bernoulli.

Expliquez les concepts et notations utilisés, le raisonnement suivi, les hypothèses éventuelles et les implications/interprétations.

On donne :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u}\times\omega + \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{f} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p + \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla\times\mathbf{f} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$

$$\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}, \qquad \nabla\times(\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla\times\mathbf{a} + \nabla\phi\times\mathbf{a}, \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) = \nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

Question II

Interprétez les différents termes des équations de bilan de l'énergie cinétique de l'écoulement moyen et de l'énergie cinétique de la turbulence.

Expliquez les concepts et notations utilisés, le raisonnement suivi, les hypothèses éventuelles et les implications/interprétations.

On donne :

- $\bar{T}_j \equiv \frac{1}{\rho}\bar{p}\bar{u}_j - 2\nu\bar{u}_i\bar{e}_{ij} + \overline{u_i'u_j'}\,\bar{u}_i$
- $\mathcal{P} \equiv -\,\overline{u_i'u_j'}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$
- $\bar{\varepsilon} \equiv 2\nu\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} \geq 0$

$$\frac{\bar{D}}{Dt}\left(\frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{u}}\|^2\right) = -\nabla\cdot\bar{\mathbf{T}} - \mathcal{P} - \bar{\varepsilon}$$

- $T_j^\star \equiv \frac{1}{\rho}\overline{p'u_j'} + \frac{1}{2}\overline{(u'_iu'_iu'_j)} - 2\nu\overline{u_i'e_{ij}'}$
- $\varepsilon \equiv 2\,\nu\,\overline{e_{ij}'e_{ij}'} \geq 0$

$$k \equiv \frac{1}{2}\overline{(u'^2+v'^2+w'^2)}$$

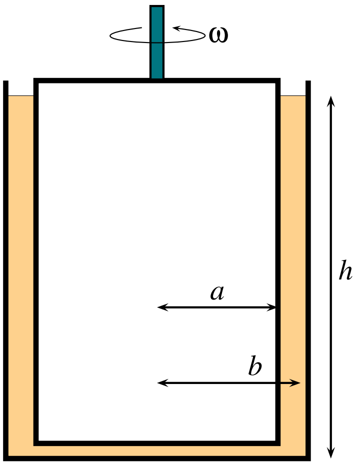
$$\frac{\bar{D}k}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{T}^\star + \mathcal{P} - \varepsilon$$

Question III

Le viscosimètre de Couette est un dispositif utilisé pour mesurer la viscosité d'un fluide. Il est constitué de deux cylindres concentriques entre lesquels se trouve confiné le fluide dont on souhaite mesurer la viscosité (en supposant le fluide incompressible et Newtonien de viscosité constante). Le cylindre intérieur est mis en rotation à vitesse angulaire constante ω tandis que le cylindre extérieur est fixe. La mesure du couple à appliquer à ce cylindre pour le maintenir au repos permet de déterminer la viscosité.

On étudie l'écoulement laminaire, stationnaire, axisymétrique et horizontal du fluide entre les deux cylindres, en ignorant les effets de bords au voisinage du fond et de la surface et en supposant que le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée verticale.

i. En résolvant les équations de Navier Stokes, montrez que la vitesse radiale est nulle et déterminez la distribution de la vitesse azimutale (selon $\mathbf{e}_\theta$).



ii. Calculez le couple nécessaire pour bloquer la rotation du cylindre extérieur. Montrez que celui-ci est proportionnel à la viscosité du fluide.

iii. En considérant que le jeu entre les cylindres est petit par rapport aux rayons des deux cylindres, montrez que le couple C peut être approché (en valeur absolue) par

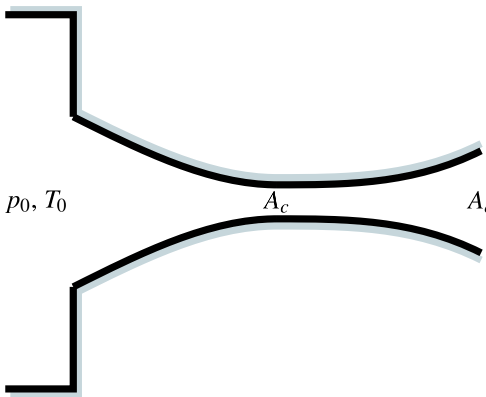
$$C \approx \mu \frac{2\pi\omega h R^3}{\Delta R}$$

où $R(\approx a \approx b)$ désigne le rayon moyen des deux cylindres et $\Delta R = b - a$ le jeu entre ceux-ci.

iv. Déterminez la puissance mécanique fournie au dispositif et la puissance mécanique dissipée (sans introduire l'approximation du point précédent).

Question IV

De l'air initialement au repos à la pression $p_0 = 3$ bar et $T_0 = 400K$ dans un réservoir de grandes dimensions s'écoule dans une tuyère dont le col présente une section $A_c = 0.3\,\text{m}^2$. La section de sortie présente une aire $A_e = 0.5\,\text{m}^2$.



i. Déterminez le nombre de Mach et la température de l'air à la sortie de la tuyère si la pression p_e à la sortie est de 2.8 bar.

ii. Esquissez et justifiez l'évolution du nombre de Mach et de la pression au sein de la tuyère si $p_e = 2.8$ bar. Déterminez les valeurs numériques du nombre de Mach et de la pression au col dans les conditions envisagées.

iii. Déterminez le débit massique en régime adapté et la valeur de p_e correspondante.

iv. Déterminez la valeur de la pression p_e conduisant à l'apparition d'un choc droit juste dans la section de sortie.

v. Dans les conditions considérées au point précédent, quelles sont les valeurs de deux pressions mesurées par un tube de Pitot placé dans le divergent là où la section droite est de 0.375 m^2 ?

L'air est assimilé à un gaz parfait dont les propriétés sont $R = 287$ J/(kg · K), $\gamma = 1.4$, $c_p = 1005$ m^2/s^2/K et $c_v = 718$ m^2/s^2/K. Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

SOLUTION TYPE

Question I

Cf. support du cours théorique.

Question II

Cf. support du cours théorique.

Question III

On se place dans un système d'axes en coordonnées cylindriques. Les hypothèses suivantes peuvent être posées.

- Le régime est établi et les variables sont indépendantes du temps $\rightarrow \partial_t \cdot = 0$.
- La symétrie du problème impose que les champs de vitesse et de pression soient indépendants de θ (régime complètement développé entre les cylindres) $\rightarrow \partial_\theta \cdot = 0$.
- Vitesse angulaire ω selon $\mathbf{e}_z$ et hauteur h supposée grande par rapport aux rayons a et b, effets de bords négligés et mouvement entre le fonds des cylindres ignoré (et vitesse à la surface libre du viscosimètre $u_z = 0$) donc on peut faire l'hypothèse d'un écoulement plan selon $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta) \rightarrow u_z = 0$ et $\partial_z \cdot = 0$
- Force de gravité $\rightarrow F_z = -\rho g$
- Fluide incompressible ($\rho = $ cst) et viscosité constante

i. *En résolvant les équations de Navier Stokes, montrez que la vitesse radiale et déterminez la distribution de la vitesse azimutale.*

Ces hypothèses permettent d'exprimer le champ de vitesse entre les cylindres,

$$\mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$$

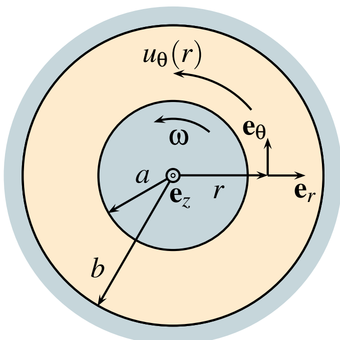
En injectant cette expression de la vitesse dans l'équation de continuité, on obtient

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_r = \frac{C}{r}$$

La constante C est déterminée en imposant la conditions d'imperméabilité du cylindre

$$u_r(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \Rightarrow u_r = 0$$

L'écoulement est donc unidirectionnel selon $\mathbf{e}_\theta$ et fonction de r.



La composante selon $\mathbf{e}_\theta$ de l'équation de quantité de mouvement se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\theta = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont obtenues en imposant les conditions de non glissement aux parois,

$$u_\theta(a) = \omega a \quad \text{et} \quad u_\theta(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -2\frac{\omega a^2}{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 \omega}{b^2 - a^2}$$

soit

$$u_\theta(r) = \frac{\omega a^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2}{r} - r\right)$$

NB : L'équation de quantité de mouvement selon $\mathbf{e}_z$ donne le profil de pression, avec $p_0 = p(0)$ la pression à la surface libre du viscosimètre,

$$\partial_z p = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = -\rho g z + p_0$$

ii. *Calculez le couple nécessaire pour bloquer la rotation du cylindre extérieur. Montrez que celui-ci est proportionnel à la viscosité du fluide.*

Les tensions visqueuses exercées par le fluide sur le cylindre extérieur sont données par

$$-\tau_{r\theta}|_{r=b} = -\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\bigg|_{r=b} = 2\mu \frac{a^2\omega}{b^2 - a^2}$$

Le couple à appliquer au cylindre extérieur vaut donc, en valeur absolue,

$$C = 2\mu \frac{a^2\omega}{b^2 - a^2} \cdot b \cdot 2\pi b h = \mu \frac{4\pi a^2 b^2 h\omega}{b^2 - a^2}$$

en tenant compte du bras de levier b et de l'aire $2\pi bh$ de la surface sur laquelle s'appliquent les tensions visqueuses.

Ce couple est bien proportionnel à la viscosité μ.

iii. *En considérant que le jeu entre les cylindres est petit par rapport aux rayons des deux cylindres, montrez que le couple C peut être approché par*

$$C \approx \mu \frac{2\pi\omega h R^3}{\Delta R}$$

où R désigne le rayon moyen des deux cylindres et $\Delta R = b - a$ le jeu entre ceux-ci.

En considérant un jeu entre les cylindres petit par rapport aux rayons, on a,

$$\Delta R = b - a, \qquad R = \frac{b+a}{2} \approx b \approx a$$

Le couple à appliquer (en valeur absolue) peut donc être approché par

$$C = \mu \frac{4\pi a^2 b^2 h\omega}{(b+a)(b-a)} \approx \mu \frac{4\pi h R^4 \omega}{2R\Delta R} \approx \mu \frac{2\pi\omega h R^3}{\Delta R}$$

comme annoncé.

iv. *Calculez la puissance mécanique fournie au dispositif et la puissance mécanique dissipée (sans introduire l'approximation du point précédent).*

La puissance mécanique à fournir au dispositif vient du couple C_{mot} à appliquer au cylindre intérieur (opposé au couple à appliquer au cylindre extérieur) pour assurer sa rotation à la vitesse angulaire ω. Ce couple peut être calculé comme en ii en évaluant les tensions visqueuses en $r = a$. Son intensité est donnée par

$$C_{mot} = \frac{4\pi\mu a^2 b^2 h\omega}{b^2 - a^2}$$

On notera que le système étant en régime stationnaire, le couple moteur est égale et opposé au couple imposé pour bloquer la rotation du cylindre extérieur.

La puissance mécanique fournie au système est donnée par

$$\mathcal{P}_{mot} = C_{mot}\omega = \frac{4\pi\mu a^2 b^2 h\omega^2}{b^2 - a^2}$$

Puisque le régime est établi, cette puissance est dissipée par viscosité. On peut vérifier ceci en calculant explicitement la dissipation visqueuse

$$\mathcal{P}_{\text{visq}} = \int_V \Phi(r) dV$$

où la fonction de dissipation est donnée par

$$\Phi = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]^2 = \mu \left[-\frac{2a^2 b^2 \omega}{(b^2 - a^2) r^2} \right]^2$$

On obtient donc

$$\mathcal{P}_{\text{visq}} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b \Phi(r) r \, dr d\theta dz = 2\pi h \mu \frac{4a^2 b^2 \omega^2}{(b^2 - a^2)^2} \int_a^b \frac{dr}{r^3} = \frac{4\pi \mu a^2 b^2 h \omega^2}{b^2 - a^2} = \mathcal{P}_{mot}$$

Question IV

i. *Déterminez le nombre de Mach et la température de l'air à la sortie de la tuyère si la pression à la sortie p_e est de 2.8 bar.*

En faisant l'hypothèse qu'aucun choc ne se produit dans la tuyère, la pression totale est conservée et on a $p_{t_e} = p_0 = 3$ bar. Dans ce cas,

$$\frac{p_e}{p_{t_e}} = \frac{2.8}{3} = 0.9333$$

En exploitant les tables, on constate qu'un tel rapport correspond à $M_e = 0.32$.

Pour un tel nombre de Mach, on a $A_e/A^\star = 1.9219$, de sorte que

$$A_\star = \frac{A_e}{1.9219} = \frac{A_e}{1.9219} = 0.26\text{m}^2$$

Cette valeur étant inférieure à la section A_c au col, l'écoulement est sous-sonique dans toute la tuyère. Conformément à l'hypothèse adoptée, aucun choc ne peut donc se produire dans la tuyère.

Pour $M_e = 0.32$, les tables fournissent également le rapport

$$\frac{T_e}{T_{t_e}} = \frac{T_e}{T_0} = 0.9799 \qquad \Rightarrow \qquad T_e = 391.96 \text{ K}$$

ii. *Esquissez l'évolution du nombre de Mach et de la pression au sein de la tuyère si $p_e = 2.8$ bar. Déterminez les valeurs numériques du nombre de Mach et de la pression au col dans les conditions envisagées.*

L'écoulement étant sous-sonique dans toute la tuyère, le nombre de Mach augmente progressivement dans le convergent, atteint une valeur maximale $M_c < 1$ au col, puis diminue dans le divergent pour atteindre sa valeur de sortie M_e.

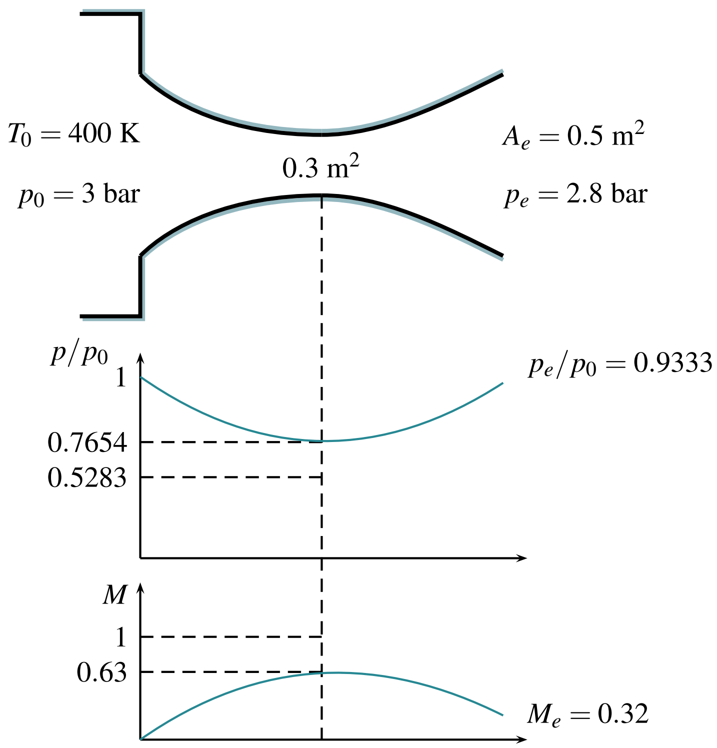
Dans le même temps, la pression diminue dans le convergent, atteint un minimum p_c au col, et augmente dans le divergent.

Des développements réalisés au point précédent on tire que $A_\star = 0.26\text{m}^2$. Dès lors, en utilisant les tables, on a

$$\frac{A_c}{A_\star} = \frac{0.3}{0.26} = 1.1538 \qquad \Rightarrow \qquad M_c = 0.63$$

Pour cette valeur du nombre de Mach, on a

$$\frac{p_c}{p_{c_e}} = \frac{p_c}{p_0} = 0.7654 \qquad \Rightarrow \qquad p_c = 2.2962 \text{ bar}$$



iii. *Déterminez le débit massique en régime adapté et la valeur de p_e correspondante.*
En régime adapté, le col est sonique et l'écoulement dans le divergent est supersonique et sans choc.

$$M_c = 1, \qquad \frac{p_c}{p_0} = 0.5283, \quad \frac{T_c}{T_0} = 0.8333$$

de sorte que $p_c = 1.5849$ bar et $T_c = 333$ K.
Le débit massique peut être calculé en se basant sur les données au col

$$Q_m = \rho_c A_c u_c = \frac{p_c}{RT_c} A_c M_c a_c = p_c A_c M_c \sqrt{\frac{\gamma}{RT_c}} = 181.9 \text{ kg/s}$$

Afin que l'écoulement dans la tuyère ne présente pas de choc, la section sonique à la sortie doit dès lors être égale à la section au col A_c de sorte que

$$\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{A_e}{A_c} = \frac{0.5}{0.3} = 1.666$$

On en déduit que $M_e = 1.98$. Pour ce nombre de Mach,

$$\frac{p_e}{p_0} = 0.1318 \quad \Rightarrow \qquad p_e = 0.3954 \text{ bar}$$

iv. *Déterminez la valeur de la pression p_e conduisant à l'apparition d'un choc droit juste dans la section de sortie.*
Pour obtenir un choc à la section de sortie, le divergent doit être supersonique et le col sonique. Les conditions en amont du choc sont celles du point précédent,

$$M_1 = 1.98, \quad p_1 = 0.3954 \text{ bar}$$

On déduit le Mach en aval du choc via la table choc normal, soit $M_2 = 0.5808$ et

$$\frac{p_2}{p_1} = 4.407 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = p_e = 1.74 \text{ bar}$$

v. *Dans le cas considéré au point précédent, quelles sont les valeurs de deux pressions mesurées par un tube de Pitot placé dans le divergent là où la section droite est de 0.375 m^2 ?*

Une section d'aire A_x placée en amont du choc de sortie est supersonique. En cet endroit, on a

$$\frac{A_x}{A_*} = \frac{A_x}{A_c} = \frac{0.375}{0.3} = 1.25 \qquad \Rightarrow \qquad M_x = 1.6$$

Les deux pressions mesurées par le tube de Pitot placé à cet endroit sont, d'une part, la pression p_x et la pression totale $p_{t,2}$ après le choc normal induit par la présence du tube de Pitot.

Pour $M_x = 1.6$, on a

$$\frac{p_x}{p_0} = 0.2353 \qquad \Rightarrow \qquad p_x = 0.7059 \text{ bar}$$

$$\frac{p_1}{p_{t,2}} = 0.2628 \qquad \Rightarrow \qquad p_{t,2} = \frac{p_x}{0.2628} = 2.68 \text{ bar}$$