

*Durée de l'épreuve : 3 heures.*

*Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*

*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*

*Rendez le questionnaire avec vos copies.*

*Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.*

### Question I

En exploitant les équations ci-dessous, introduisez et illustrez l'effet Marangoni.

$$\begin{cases} [\sigma_{xz}] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ [\sigma_{yz}] + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 \\ [-p + \sigma_{zz}] = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{cases}$$

En particulier, décrivez l'origine de ces équations (sans développement mathématique nouveau), précisez la signification des différents termes et expliquez l'effet Marangoni sur base des équations.

### Question II

Introduisez le problème de la fermeture turbulente.

En vous basant sur les équations ci-dessous, montrez comment celle-ci peut être réalisée selon le modèle de Boussinesq-Prandtl.

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_e \bar{e}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^T &= -\frac{\bar{p}}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu_e \bar{e}_{ij} - \overline{u'_i u'_j} & \nu_e &= u' \ell_m \\ &= -\left( \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2k}{3} \right) \delta_{ij} + 2(\nu + \nu_e) \bar{e}_{ij} & \bullet \bar{u}(y + \ell_m) &\approx \bar{u}(y) + \frac{d\bar{u}}{dy} \ell_m : u' \sim \ell_m \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \\ & & \bullet \ell_m &\sim \kappa y. \quad \nu_e = \kappa^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \end{aligned}$$

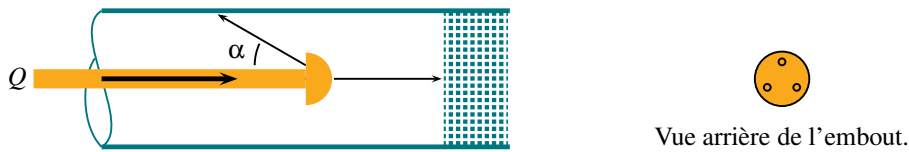
$$-\overline{u'v'} = \nu_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \kappa^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \approx \text{const.} = \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const.}$$

Précisez l'origine et la signification des différentes expressions utilisées, les hypothèses et la motivation de la démarche.

### Question III

La technique de l'hydrocurage est utilisée pour déboucher les canalisations obstruées par des débris. Le schéma est illustré ci-dessous.

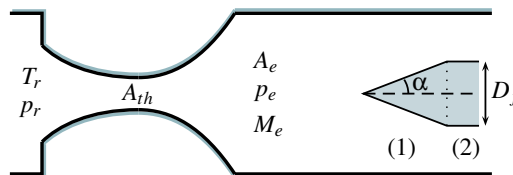


De l'eau est amenée à une pression  $p_0$  et un débit  $Q$  par un conduit flexible d'un diamètre intérieur  $D$ . À l'extrémité du flexible, l'eau s'échappe à travers quatre buses d'un diamètre  $d$ . Une des buses est orientée vers l'avant, *i.e.* vers les débris à évacuer, et les trois autres sont orientées vers l'arrière, en faisant un angle  $\alpha$  avec le flexible. On suppose que le débit se répartit de façon égale entre les 4 buses. Sur la figure de gauche, une seule des buses orientées vers l'arrière est représentée. Les trois buses sont placées à  $120^\circ$  l'une de l'autre.

Le tuyau avance seul dans la canalisation (contenant de l'air à pression atmosphérique) jusqu'à l'endroit où le bouchon se trouve. Calculez la force qui pousse le tuyau dans la canalisation dans le cas où celui-ci est parfaitement horizontal. On ne tiendra pas compte de l'interaction des quatre jets avec les parois de la canalisation ou l'amas de débris.

### Question IV

On considère un écoulement dans une soufflerie supersonique alimentée par un flux d'air sec provenant d'un réservoir de grandes dimensions où la température  $T_r = 300$  K est constante et la pression  $p_r$  ajustable. L'air est accéléré par une tuyère convergente-divergente dont la section au col est  $A_{th} = 1.77$  m<sup>2</sup>. Dans la veine d'essai, de section constante  $A_e = 3$  m<sup>2</sup>, la pression vaut  $p_e = 1$  bar.



- Déterminez la pression  $p_r$  à imposer dans le réservoir pour obtenir la pression voulue  $p_e = 1$  bar dans la veine d'essai en régime adapté. Déterminez dans ce cas la vitesse de l'air dans la section d'essai ainsi que le flux de quantité de mouvement en sortie de tuyère.
- Sans effectuer de calcul supplémentaire, esquissez les profils de  $M$ ,  $p/p_r$  et  $T/T_r$  dans la tuyère.
- Déterminez la pression d'arrêt mesurée par un tube de Pitot placé dans la section d'essai  $A_e$ .

On désire étudier l'écoulement supersonique 2D autour d'un modèle placé horizontalement dans la section d'essai (dans les conditions de tuyère adaptée du point i). Ce modèle de dernier étage de fusée est constitué (1) d'une tête (capsule habitée) assimilée à un dièdre symétrique d'ouverture  $\alpha = 15^\circ$  et (2) d'un réservoir horizontal. La dimension frontale (projetée) vaut  $D_f = 0.1$  m (le schéma n'est pas à l'échelle, les effets locaux et de blocage dans la soufflerie sont négligés).

- Sans faire de calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du modèle en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach et de la pression.
- Calculez les forces de lift et drag (par unité de profondeur) agissant sur le nez de la fusée (1).

L'air est assimilé à un gaz parfait dont les propriétés sont  $R = 287$  J/(kg · K),  $\gamma = 1.4$ . Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

## SOLUTION TYPE

### Question I

Cf. support du cours théorique.

### Question II

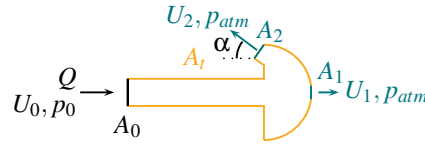
Cf. support du cours théorique.

### Question III

Les hypothèses suivantes peuvent être posées :

- Le régime est établi et les variables sont indépendantes du temps  $\rightarrow \partial_t \cdot = 0$
- Fluide incompressible  $\rightarrow \rho = \text{cst}$
- Forces volumiques (gravité) négligées  $\rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}$
- Ecoulement supposé turbulent (profils de vitesse uniformes) et effets visqueux négligés  $\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$
- Débit réparti de manière égale dans les buses  $q_i = q$  ( $i = 1, \dots, 4$ )
- Jet en sortie de buses = surface libre (et pression atmosphérique)
- Problème axial/horizontal (pas de composante radiale vu la symétrie)

Le volume de contrôle considéré est composé du flexible et de la tête (4 buses dont 2 non illustrées) :



La forme intégrale de la continuité donne après simplifications (vitesse parallèle à la paroi du tuyau,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{A_i} = 0$ ),

$$\int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = -U A_0 + \sum_{i=1}^4 U_i A_i = 0 \text{ avec } A_0 = \frac{\pi D^2}{4}, A_i = A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow Q = U_0 A_0 = \sum_{i=1}^4 U_i A_i = \sum_{i=1}^4 q_i = 4q \rightarrow U_i = U_1 = \frac{Q}{\pi d^2}$$

La force déplaçant le flexible peut être obtenue en développant la forme intégrale de la conservation de la quantité de mouvement, ou directement à partir de la résultante exercée sur un système ouvert :

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^{N_{inlet}} [K_{2\alpha} \rho_\alpha \langle v_\alpha \rangle^2 + p_\alpha] A_\alpha \mathbf{e}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{N_{inlet}} [K_{2\beta} \rho_\beta \langle v_\beta \rangle^2 + p_\beta] A_\beta \mathbf{e}_\beta$$

- Ecoulement turbulent à l'entrée/sortie :  $K_{2\alpha, \beta} \approx 1$
- Fluide incompressible :  $\rho_{\alpha, \beta} = \rho$
- $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x = -1$ ,  $\mathbf{e}_{\beta 2,3,4} \cdot \mathbf{e}_x = -\cos \alpha$ ,  $\mathbf{e}_{\beta 1} \cdot \mathbf{e}_x = 1$

$$R_x = (\rho U_0^2 + p_0) A_0 - (\rho U_1^2 + p_{atm}) (-3 \cos \alpha + 1) A_1$$

La force nette sur le flexible doit tenir compte de la pression (atmosphérique) externe exercée,

$$R_x^* = (\rho U_0^2 + p_0 - p_{atm}) A_0 - (\rho U_1^2 + p_{atm} - p_{atm}) (-3 \cos \alpha + 1) A_1$$

$$= \frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} \left( 1 + \frac{3 \cos \alpha - 1}{16} \frac{D^2}{d^2} \right) + (p_0 - p_{atm}) \frac{\pi D^2}{4}$$

NB : Selon  $\mathbf{e}_y$ , seules les 3 buses latérales espacées de  $120^\circ$  ont des composantes non nulles mais elles se simplifient mutuellement car  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_y = \sin \alpha$ ,  $\mathbf{e}_{2,3} \cdot \mathbf{e}_y = -\sin \alpha \cos(\frac{120}{2}) = -\frac{\sin \alpha}{2}$  et la résultante  $R_y = 0$ .

Alternativement, les résultats précédents peuvent être obtenus de manière générale à partir de la conservation de la quantité de mouvement, après simplifications, et en utilisant le théorème de Stokes sur un contour fermé  $\int_A p_{atm} dA = 0$ , la pression étant constante à l'entrée ( $p_0$ ) et égale à la pression atmosphérique en sortie ( $p_{atm}$ ),

$$\int_A \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

$$-\rho U_0^2 A_0 - 3\rho \cos \alpha U_1^2 A_1 + \rho U_1^2 A_1 = \int_{A_0} (p_0 - p_{atm}) \mathbf{n} dA_0 + \int_{A_{i=1 \rightarrow 4}} (p_{atm} - p_{atm}) \mathbf{n} dA_i + \int_{A_t} (p - p_{atm}) \mathbf{n} dA_t$$

Avec la force exercée par la paroi du tuyau sur le fluide  $F_{t \rightarrow f} = \int_{A_t} (p - p_{atm}) \mathbf{n} dA_t$ , la force qui pousse le tuyau dans la conduite vaut,

$$F_{f \rightarrow t} = -F_{t \rightarrow f} = \rho U_0^2 A_0 + 3\rho \cos \alpha U_1^2 A_1 - \rho U_1^2 A_1 + (p_0 - p_{atm}) A_0 = R_x^*$$

NB : Si un profil de vitesse laminaire est considéré dans le tuyau,  $K_{2\alpha} = 4/3$  dans la résultante (et les vitesses  $U_0, U_1$  sont des vitesses moyennes). Ce coefficient peut être obtenu dans la conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques pour un profil parabolique de vitesse (Poiseuille cylindrique).

#### Question IV

- i. Déterminez la pression  $p_r$  à imposer dans le réservoir pour obtenir la pression voulue  $p_e = 1$  bar dans la veine d'essai en régime adapté. Déterminez dans ce cas la vitesse de l'air dans la section d'essai ainsi que le flux de quantité de mouvement en sortie de tuyère.

La tuyère amenant un écoulement supersonique dans la veine d'essai est adaptée, la section au col est donc sonique et la pression totale est conservée (pas de choc)

$$\text{Tuyère adaptée} \Rightarrow M_{th} = 1, A_{th} = A_{th}^* = A_e^*, p_{t,e} = p_r$$

Le rapport de section à la sortie étant connu, le rapport de pression et le nombre de Mach peuvent être déduits des tables

$$\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{A_e}{A_{th}^*} = 1.69 \xrightarrow{\text{Tables}} M_e = 2, \frac{p_e}{p_{t,e}} = 0.1278 \Rightarrow p_r = p_e \frac{p_r}{p_e} = p_e \frac{p_{t,e}}{p_e} = 7.82 \text{ bar.}$$

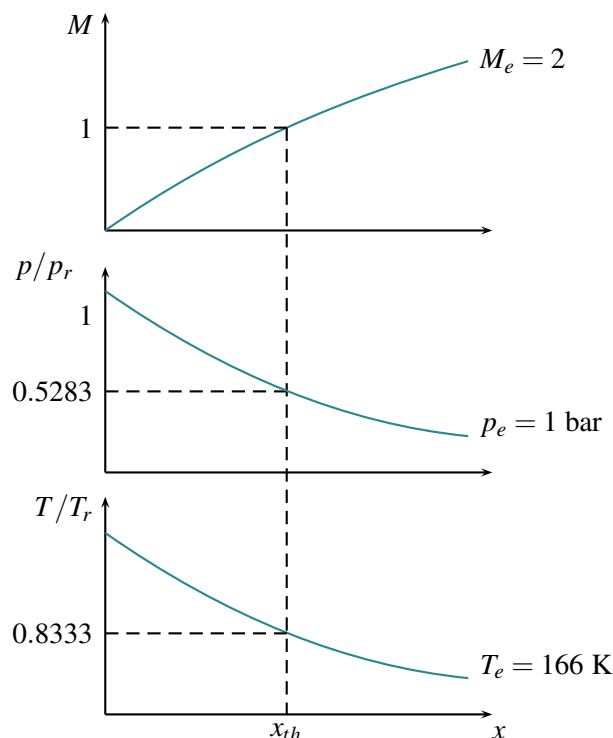
En sortie de tuyère,  $M_e = 2$  donc  $T_e = T_r \frac{T_e}{T_r} = 166 \text{ K}$ . La vitesse vaut donc

$$U_e = M_e a_e = M_e \sqrt{\gamma R T_e} = 518 \text{ m/s}$$

Le flux de quantité de mouvement en sortie de tuyère est calculé à partir du débit massique (au col ou en sortie) et de la vitesse en sortie (avec la pression en [Pa]),

$$Q_{q,e} = Q_m U_e = M_{th} p_{th} A_{th} \sqrt{\frac{\gamma}{R T_{th}}} U_e = M_e^2 p_e A_e \gamma = 1.68 \cdot 10^6 \text{ kg.m/s}^2$$

- ii. Sans effectuer de calcul supplémentaire, esquissez les profils de  $M$ ,  $p/p_r$  et  $T/T_r$  dans la tuyère.



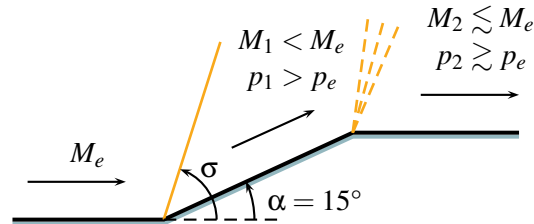
iii. Déterminez la pression d'arrêt mesurée par un tube de Pitot placé dans la section d'essai  $A_e$ .

Un tube de Pitot placé dans la veine d'essai à  $M_e = 2$  subit un choc normal local au niveau du nez, le rapport de pression vaut donc " $p_1/p_{t,2}$ " = 0.1773 et connaissant  $p_1 = p_e$ , la pression totale (après le choc détaché devant le Pitot) vaut,

$$p_{\text{Pitot}} = \frac{p_{t,2}}{p_1} p_\infty = 5.67 \text{ bar}$$

iv. Sans faire de calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du modèle en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach et de la pression.

Seule la perturbation locale de l'écoulement est considérée, sans interaction avec le reste de la section d'essai (hauteur négligeable). L'écoulement se simplifie donc en un plan incliné (surface 1) suivi d'un plan parallèle à l'écoulement (surface 2).



- Zone  $e \rightarrow 1$  : écoulement supersonique avec changement de direction  $\delta = \alpha = 15^\circ > 0$  donc choc oblique (considéré faible) d'où une diminution du nombre de Mach  $M_1 < M_e$  et une augmentation de la pression (compression)  $p_1 > p_e$ .
  - Zone  $1 \rightarrow 2$  : écoulement supersonique avec changement de direction  $\delta = -15^\circ < 0$  donc détente isentropique d'où une augmentation du nombre de Mach  $M_2 > M_1$  ( $M_2 \lesssim M_e$  à cause de la présence du choc en amont) et une diminution de la pression (détente)  $p_2 < p_1$  ( $p_2 \gtrsim p_e$  pour la même raison).
- v. Calculez les forces de lift et drag (par unité de profondeur) agissant sur le nez de la fusée (1).

Sur la surface 1, un choc oblique se produit. Le graphique  $\sigma - \delta - M$  est utilisé pour calculer  $\sigma$  avec  $\delta = 15$  et  $M = M_e = 2$ , on trouve  $\sigma = 45.2^\circ$ . On décompose l'écoulement amont en ses composantes normales et tangentielles,

$$M_{e,n} = M_e \sin \sigma = 1.42, \quad M_{e,t} = M_e \cos \sigma = 1.41$$

La table des chocs normaux pour  $M_{e,n} = 1.42$  donne,

$$M_{1,n} = 0.7314, \quad \frac{p_1}{p_e} = 2.186 \Rightarrow p_1 = 2.186 \text{ bar}$$

Vu la symétrie et l'absence d'angle d'attaque, la portance  $L$  est nulle. La seule composante non-nulle de force est donc la contribution à la traînée de la pression sur la surface 1 (dont la projection vaut  $D_f = 0.1 \text{ m}$ ),

$$L = 0 \text{ N/m}, \quad D = p_1 D_f = 2.18 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$