

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.

*Indiquez sur chaque feuille votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*

Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Listez et explicitez les différentes conditions aux limites applicables à l'interface entre deux fluides non miscibles.

Question II

Introduisez le concept de loi universelle de paroi.

Question III

Déterminez les relations et principes de base conduisant aux relations de Rankine-Hugoniot relatives à un choc normal.

Question IV

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux à la vitesse horizontale uniforme U sur une plaque plane de grandes dimensions et parallèle à l'écoulement. La plaque est poreuse ; un dispositif de succion induit une vitesse V du fluide ($V > 0$) vers le bas à travers la plaque, perpendiculairement à celle-ci. L'écoulement est supposé laminaire, stationnaire et complètement développé de sorte que les différentes variables ne dépendent pas de la coordonnée longitudinale. Il n'existe pas de gradient longitudinal de pression.

- i. Dans un premier temps, on considère que le fluide est Newtonien de viscosité cinématique ν .
 - (a) En vous basant sur une analyse dimensionnelle des paramètres en jeu, déterminez l'expression d'une longueur caractéristique de l'influence de la plaque sur l'écoulement.
 - (b) Déterminez la distribution de la vitesse et de la pression au sein du fluide.
 - (c) Calculez la tension exercée par le fluide sur la plaque poreuse.
 - (d) Sur base de l'équation de la vorticité

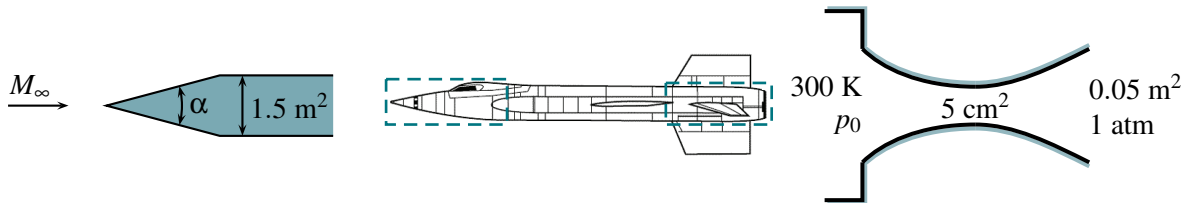
$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{f} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right)$$

particularisée à la configuration étudiée, expliquez pourquoi la solution n'est pas valable dans le cas où $V < 0$, *i.e.* si le fluide est injecté à travers la plaque poreuse.

- ii. En appliquant une approche intégrale, montrez que la force exercée sur la plaque est indépendante de la nature du fluide, *i.e.* que la tension n'est pas modifiée si le fluide n'est pas Newtonien.

Question V

On considère un avion supersonique (X-15) propulsé par un moteur type fusée. L'essentiel de l'appareil est constitué d'une chambre de combustion, supposée de grandes dimensions, qui contient des gaz à la température de 300 K et la pression p_0 . Les gaz de combustion sont éjectés via une buse de Laval (convergent-divergent) dont la section de sortie est de 0.05 m^2 et débouche dans l'air à la pression atmosphérique. La section au niveau du col est de 5 cm^2 .



- Déterminez la gamme des pressions p_0 permettant d'éviter tout choc dans et en-dehors de la buse et esquissez le profil de pression et de nombre de Mach dans la tuyère.
- Déterminez le débit maximum d'air pouvant s'écouler dans la tuyère dans les conditions identifiées au point i ainsi que la poussée correspondante.

En fonction des conditions extérieures et de l'écoulement autour de la géométrie (complexe) de l'avion, son record de vitesse correspond à $M_\infty = 6.7$, avec $p_\infty = 1 \text{ atm}$. On se concentre sur l'écoulement autour du nez de l'avion, assimilé à un dièdre horizontal (symétrique, d'ouverture $\alpha = 20^\circ$) suivi d'un plan (parallèle à l'écoulement).

- Sans faire de calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du nez en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach et de la pression.
- Calculez la distribution de pression sur l'ensemble des surfaces composant le nez de l'avion ainsi que la résultante des forces, sachant que la section frontale de l'avion est de 1.5 m^2 .
- Discutez l'endroit où placer un tube de Pitot pour mesurer de manière efficace la vitesse de l'avion et déterminez la pression qu'il mesurerait. Comparez votre discussion suivant l'utilisation de la théorie exacte des chocs et l'approximation isentropique.

Les gaz de combustion sont assimilés à un gaz parfait dont les propriétés sont identiques à celles de l'air, i.e. $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, $\gamma = 1.4$. Si vous devez lire des informations dans les tables et le graphique de choc oblique, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

SOLUTION TYPE

Question I

Cf. support du cours théorique.

Question II

Cf. support du cours théorique.

Question III

Cf. support du cours théorique.

Question IV

i. Dans un premier temps, on considère que le fluide est Newtonien de viscosité cinématique ν .

(a) En vous basant sur une analyse dimensionnelle des paramètres en jeu, déterminez l'expression d'une longueur caractéristique de l'influence de la plaque sur l'écoulement.

Les données en jeu font intervenir les vitesses U et V ainsi que la viscosité cinématique ν du fluide dont les dimensions sont

$$[U] = [V] = \frac{L}{T} \quad \text{et} \quad [\nu] = \frac{L^2}{T}$$

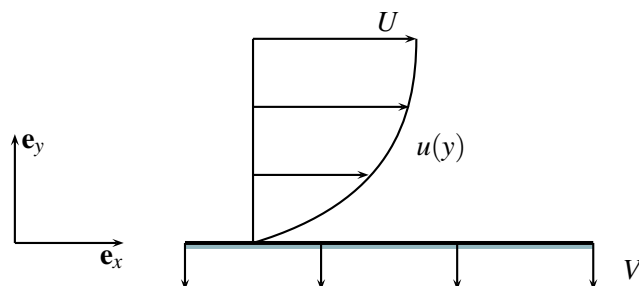
L'écoulement étant complètement développé dans la direction de la vitesse uniforme U , on ne peut faire apparaître de longueur caractéristique dans la direction parallèle à la plaque. Par contre, la vitesse de suction V et la viscosité du fluide contrôlent la distribution de la vitesse dans la direction perpendiculaire à la plaque. Avec ces deux grandeurs, on peut former la longueur caractéristique

$$\ell = \frac{\nu}{V} \quad \text{telle que} \quad [\ell] = L$$

(b) Déterminez la distribution de la vitesse et de la pression au sein du fluide.

On adopte des coordonnées cartésiennes où x est la coordonnée dans la direction de la plaque et y est perpendiculaire à celle-ci. Les hypothèses suivantes peuvent être posées :

- écoulement 2D $\Rightarrow w = \partial_z \cdot = 0$;
- écoulement complètement développé et stationnaire $\Rightarrow \partial_x \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- pas de gradient longitudinal de pression $\Rightarrow \partial_x p = 0$;
- pas de force volumique (gravité négligée) $\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0}$;
- fluide Newtonien, de viscosité cinématique ν constante et écoulement supposé incompressible $\Rightarrow \rho = \text{cst}$.



En fonction de ces hypothèses, le champ de vitesse le long de la plaque s'écrit,

$$\mathbf{u}(y) = u(y)\mathbf{e}_x + v(y)\mathbf{e}_y$$

En injectant cette expression de la vitesse dans l'équation de continuité, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(y) = C$$

La constante C étant déterminée en imposant la condition limite de succion à la paroi,

$$v(y=0) = -V \Rightarrow v(y) = -V$$

La quantité de mouvement selon \mathbf{e}_x se réduit à (vu $v = -V$ et $u = u(y)$),

$$-V \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

Cette équation différentielle ordinaire d'ordre 2, homogène et linéaire se résout immédiatement en utilisant le polynôme caractéristique,

$$u(y) = C_1 + C_2 e^{-Vy/\nu}$$

Notez que la longueur caractéristique ℓ apparaît directement : l'argument de l'exponentielle s'écrit sous la forme $-y/\ell$.

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées en imposant la condition de non-glissement à la paroi et la vitesse uniforme horizontale loin de la paroi,

$$u(y=0) = 0 \ \& \ \lim_{y \rightarrow +\infty} u(y) = U \Rightarrow C_1 = -C_2 = U$$

La distribution de vitesse est donc,

$$\mathbf{u}(y) = U \left(1 - e^{-Vy/\nu}\right) \mathbf{e}_x - V \mathbf{e}_y$$

La quantité de mouvement selon \mathbf{e}_y se réduit à (vu $v = -V$),

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = C$$

La constante C est choisie au moyen d'une pression de référence, $p = p_\infty$.

(c) Calculez la tension exercée par le fluide sur la plaque poreuse.

En 2D, la tension s'écrit, de manière générale,

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = (\tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y)\mathbf{e}_x + (\tau_{yy}n_y + \tau_{yx}n_x)\mathbf{e}_y$$

La plaque étant orientée selon $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$, on a $n_x = 0$, $n_y = 1$, et $\mathbf{t} = \tau_{xy}\mathbf{e}_x + \tau_{yy}\mathbf{e}_y$ où

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U \frac{V}{\nu} e^{-Vy/\nu} \Big|_{y=0} = \mu U \frac{V}{\nu} = \rho U V \\ \tau_{yy} &= -p + \sigma_{yy} \Big|_{y=0} = -p + 2\mu \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = -p_\infty \end{aligned}$$

La force exercée par le fluide sur la plaque dans la direction \mathbf{e}_x peut être calculée en intégrant la tension sur une surface de référence de la plaque S_p . Puisque ρ , U et V sont constants, on obtient

$$F_x^{f \rightarrow p} = \int_{S_p} \tau_{xy} dS_p = \int_{S_p} \rho U V dS_p = \rho U V S_p$$

- (d) Sur base de l'équation de la vorticité particularisée à la configuration étudiée, expliquez pourquoi la solution n'est pas valable dans le cas où $V < 0$, i.e. si le fluide est injecté à travers la plaque poreuse.

Le profil de vitesse

$$\mathbf{u}(y) = U \left(1 - e^{-Vy/\nu} \right) \mathbf{e}_x - V \mathbf{e}_y$$

déterminé plus haut conduit à une incohérence dans le cas où $V < 0$ puisque, en s'écartant de la plaque, on a alors

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(y) = +\infty \mathbf{e}_x$$

Ceci montre que la solution basée sur un profil de vitesse complètement développé n'est pas réaliste si $V < 0$.

Ce comportement peut être expliqué à partir de l'équation différentielle pour la vorticité particularisée en tenant compte des hypothèses listées en (b). En particulier, l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel du type $\mathbf{u}(y) = u(y)\mathbf{e}_x + V\mathbf{e}_y$ conduit à ne considérer que la composante ω_z de la vorticité puisque

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \omega_z \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

En outre, dans le cas d'un fluide Newtonien incompressible et de viscosité constante, le rotationnel du tenseur des tensions s'écrit simplement

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

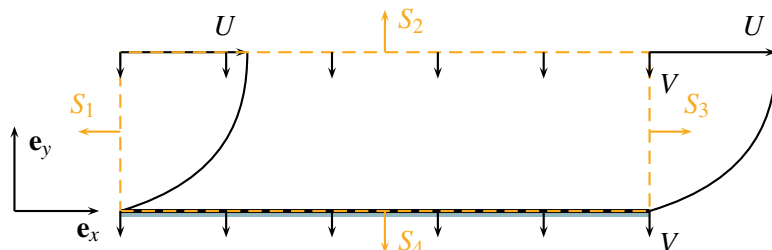
Dès lors, l'équation différentielle pour la vorticité devient

$$-V \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \quad (\dagger)$$

La vorticité est créée au niveau de la paroi poreuse. L'équation ci-dessus montre qu'une distribution stationnaire et indépendante de la coordonnée x peut être obtenue par l'équilibre entre deux mécanismes agissant dans des sens opposés : le terme de droite de (??) est associé à la diffusion de la vorticité depuis la paroi vers l'intérieur de l'écoulement alors que le terme de gauche (avec $V > 0$) décrit l'advection de cette vorticité vers la paroi. Dans le cas où $V < 0$, par contre, les deux mécanismes conduisent à un transport de vorticité de la paroi vers les valeurs croissantes de y . Dès lors, il ne peut y avoir de compensation entre ces deux effets de sorte que la vorticité est systématiquement injectée dans la couche limite. Celle-ci doit donc croître indéfiniment avec x , ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse d'un écoulement parfaitement développé.

- ii. En appliquant une approche intégrale, montrez que la force exercée sur la plaque est indépendante de la nature du fluide, i.e. que la tension n'est pas modifiée si le fluide n'est pas Newtonien.

Définissons un volume de contrôle pour le fluide comme suit, avec $\bigcup_i S_i$.



Vu les hypothèses listées précédemment, le bilan de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle s'écrit

$$\int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS$$

L'écoulement étant complètement développé selon \mathbf{e}_x , les contributions des surfaces S_1 et S_3 s'annulent. Sur S_2 , considérant que cette surface est rejetée très loin de la paroi S_4 , on sait que l'écoulement tend vers $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x - V\mathbf{e}_y$ et vu $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_y$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -V$. Sur S_4 , les conditions limites sont $\mathbf{u} = -V\mathbf{e}_y$ et vu $\mathbf{n}_4 = -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V$.

Le bilan de la quantité de mouvement donne donc,

$$\int_{S_2} -\rho(U\mathbf{e}_x - V\mathbf{e}_y)V dS_2 + \int_{S_4} \rho(-V\mathbf{e}_y)V dS_4 = \int_{S_2} (t_x\mathbf{e}_x + t_y\mathbf{e}_y) dS_2 + \int_{S_4} (t_x\mathbf{e}_x + t_y\mathbf{e}_y) dS_4$$

Vu la vitesse uniforme U selon \mathbf{e}_x sur S_2 , les tensions selon \mathbf{e}_x sont nulles et l'équilibre donne, avec ρ, U, V constants et en identifiant la surface de la plaque $S_p = S_4 = S_2$,

$$\int_{S_2} -\rho UV dS_2 = \int_{S_4} t_x dS_4 = F_x^{p \rightarrow f} \quad \Rightarrow \quad F_x^{f \rightarrow p} = \int_{S_2} \rho UV dS_2 = \rho UV S_2 = \rho UV S_p$$

On retrouve l'expression trouvée en i.(c), dépendante de la masse volumique ρ mais indépendante de la nature du fluide (pas d'hypothèse sur $\boldsymbol{\tau}$). Selon \mathbf{e}_y , il n'y a pas de contrainte sur S_2 , vu la vitesse uniforme $-V$, la seule composante non nulle de t_y étant la pression $-p_\infty$.

$$-\int_{S_2} t_y dS_2 = \int_{S_4} t_y dS_4 = F_y^{p \rightarrow f} \quad \Rightarrow \quad F_y^{f \rightarrow p} = \int_{S_2} t_y dS_2 = -p_\infty S_2 = -p_\infty S_p$$

Question V

- i. Déterminez la gamme des pressions p_0 permettant d'éviter tout choc dans et en-dehors de la buse et esquissez le profil de pression et de nombre de Mach dans la tuyère.

Tout risque de choc sera écarté si l'écoulement reste sous-sonique en tout point ou si la tuyère est adaptée.

Si le col est sonique, $A^* = A_{col} = 5 \text{ cm}^2$. A la sortie, où la section $A_s = 0.05 \text{ m}^2 = 500 \text{ cm}^2$, on a $A_s/A^* = 100$ (pas de choc donc A^* conservée), ce qui peut correspondre (en arrondissant dans les tables) à un nombre de Mach $M_s = 0.01$ (en prenant $A/A^* = 58$, le plus proche) ou 6.94.

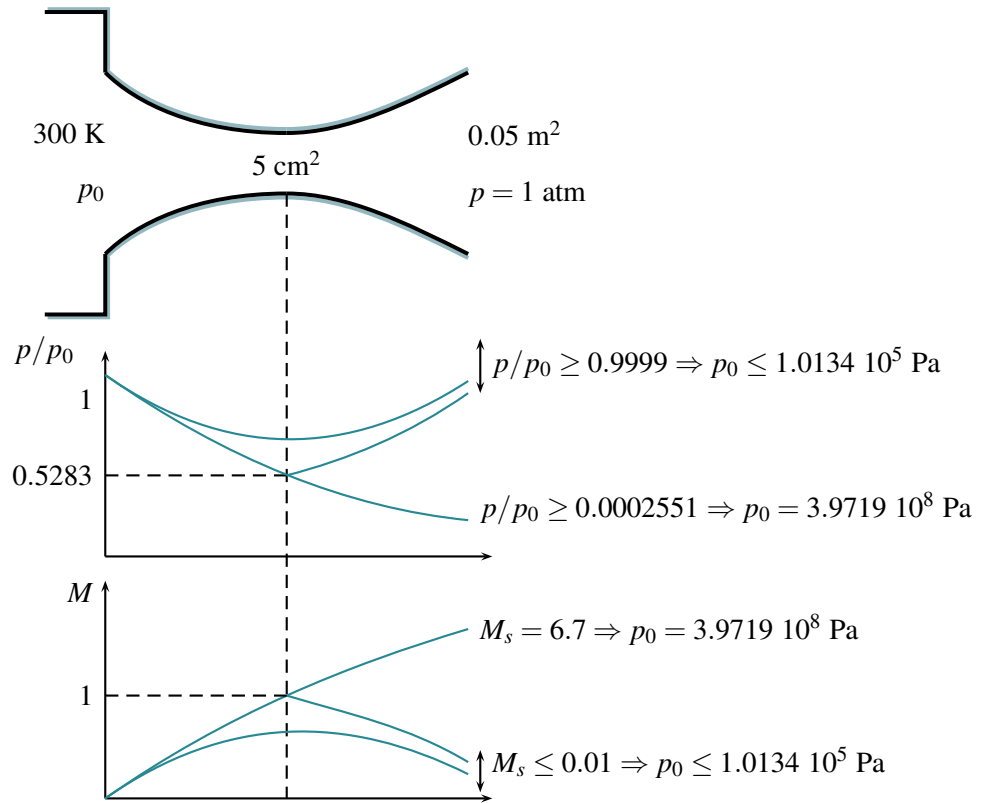
Examinons d'abord la première option. Un nombre de Mach égal à 0.01 correspond à $p/p_0 = 0.9999$. La pression de sortie étant égale à la pression atmosphérique, on en déduit que la pression totale p_0 , i.e. la pression régnant dans le réservoir où l'air est au repos, est égale à

$$p_0 = \frac{p}{0.9999} = 1.001 \text{ atm} = 1.0134 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Si la tuyère est adaptée et que le nombre de Mach de sortie est égal à 6.94, on sait que $p/p_0 = 0.0002551$. La pression totale correspondante est donc

$$p_0 = \frac{p}{0.0002551} = 3920 \text{ atm} = 3.9719 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

En conclusion, il ne se produira aucun choc ni à l'intérieur ni à l'extérieur de la tuyère si $p_0 \leq 1.0134 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ou si $p_0 = 3.9719 \cdot 10^8 \text{ Pa}$.



- ii. Déterminez le débit maximum d'air pouvant s'écouler dans la tuyère dans les conditions identifiées au point i ainsi que la poussée correspondante.

Le débit maximum est atteint lorsque le régime est supersonique dans le divergent. Ce régime est atteint sans choc si la tuyère est adaptée, *i.e.* si $p_0 = 3.9719 \cdot 10^8$ Pa. Dans ce cas, puisque la sortie est à $M_s = 6.94$, on relève que la température au niveau de la sortie est donnée par

$$T_s/T_0 = 0.09405 \Rightarrow T_s = 0.09405T_0 = 28.21 \text{ K}$$

$$\rho_s = \frac{p_s}{RT_s} = 12.51 \text{ kg/m}^3$$

$$a_s = \sqrt{\gamma RT_s} = 106.47 \text{ m/s}$$

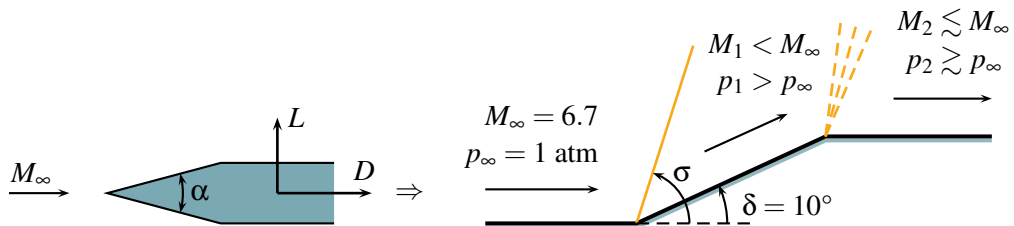
Le débit massique au travers de la tuyère adaptée et la poussée résultante sont donc

$$Q_m = \rho_s A_s u_s = \rho_s A_s a_s M_s = 462.31 \text{ kg/s}$$

$$F = Q_m u_s = \rho_s A_s (a_s M_s)^2 = 3.41 \cdot 10^5 \text{ N}$$

- iii. Sans faire de calcul, décrivez qualitativement l'écoulement autour du nez en indiquant la présence d'éventuels chocs ainsi que les variations du nombre de Mach et de la pression.

La géométrie du nez ainsi que l'angle d'attaque nul rendent l'exercice symétrique, l'écoulement autour du nez peut donc être simplifié par l'écoulement sur les surfaces supérieures, avec un plan incliné à $\alpha/2 = 10^\circ$ (surface 1) suivi d'un plan parallèle à l'écoulement (surface 2).



- Zone $\infty \rightarrow 1$: écoulement supersonique avec changement de direction $\delta = 10^\circ > 0$ donc choc oblique (considéré faible) d'où une diminution du nombre de Mach $M_1 < M_\infty$ et une augmentation de la pression (compression) $p_1 > p_\infty$.

- Zone 1 → 2 : écoulement supersonique avec changement de direction $\delta = -10^\circ < 0$ donc détente isentropique d'où une augmentation du nombre de Mach $M_2 > M_1$ ($M_2 \lesssim M_\infty$ à cause de la présence du choc en amont) et une diminution de la pression (détente) $p_2 < p_1$ ($p_2 \gtrsim p_\infty$ pour la même raison).

iv. Calculez la distribution de pression sur l'ensemble des surfaces composant le nez de l'avion ainsi que la résultante des forces, sachant que la section frontale de l'avion est de 1.5 m^2 .

Sur la surface 1, un choc oblique se produit. Le graphique $\sigma - \delta - M$ est utilisé pour calculer σ avec $\delta = 10$ et $M = M_\infty = 7$ (le plus proche de 6.7), on trouve $\sigma = 17^\circ$. On décompose l'écoulement amont en ses composantes normales et tangentielles,

$$M_{\infty,n} = M_\infty \sin \sigma = 1.96, \quad M_{\infty,t} = M_\infty \cos \sigma = 6.41$$

La table des chocs normaux pour $M_{\infty,n} = 1.96$ donne,

$$M_{1,n} = 0.5844, \quad \frac{p_1}{p_\infty} = 4.315 \Rightarrow p_1 = 4.315 \text{ atm}, \quad \frac{p_{t_1}}{p_{t_\infty}} = 0.7395, \quad \frac{T_1}{T_\infty} = 1.655$$

Grâce au rapport des températures, on déduit le Mach tangentiel et le Mach résultant,

$$M_{1,t} = M_{\infty,t} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_1}} = 4.98, \quad M_1 = \sqrt{M_{1,n}^2 + M_{1,t}^2} = 5.01$$

Sur la surface 2, une détente isentropique se produit, de déflexion $\delta = -10$. Le Mach M_2 se déduit de l'équation de Prandtl-Meyer. Les valeurs de v sont calculées à partir des tables, arrondies à la valeur la plus proche.

$$v(M_1) - v(M_2) = \delta \Rightarrow v(M_2) = 87.01 \Rightarrow M_2 = 6.31$$

La détente étant isentropique, la pression totale est conservée entre 1 et 2 ($p_{t_2} = p_{t_1}$) et vu le choc en amont, $p_{t_1}/p_{t_\infty} = 0.7395$. Les rapports de pression p_2/p_{t_2} et p_∞/p_{t_∞} viennent des tables à M_2 et M_∞ ,

$$p_2 = \frac{p_2}{p_{t_2}} \frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} \frac{p_{t_1}}{p_{t_\infty}} \frac{p_{t_\infty}}{p_\infty} p_\infty = 1.07 \text{ atm}$$

Vu la symétrie et l'absence d'angle d'attaque, la portance L est nulle et la pression sur la surface 2 n'apporte pas de contribution à la traînée D . La seule composante non-nulle de force est donc la contribution à la traînée de la pression sur la surface 1 (dont la projection vaut 1.5 m^2),

$$L = 0 \text{ N}, \quad D = p_1 - p_\infty \times 1.5 = 6.55 \cdot 10^5 \text{ N}$$

v. Discutez l'endroit où placer un tube de Pitot pour mesurer de manière efficace la vitesse de l'avion et déterminez la pression qu'il mesurerait. Comparez votre discussion suivant l'utilisation de la théorie exacte des chocs et l'approximation isentropique.

En utilisant l'approximation isentropique directement entre M_∞ et M_2 (sans prendre en compte le choc), l'absence de changement de direction donne,

$$v(M_\infty) - v(M_2) = 0 \Rightarrow M_2 = M_\infty, \quad p_2 = p_\infty$$

Le tube de Pitot pourrait donc être placé de manière équivalente sur la surface 2 ou à la pointe du nez (dans la zone d'entrée ∞). L'écoulement sur l'intrados étant supersonique, un choc droit se produit juste devant le tube de Pitot placé dans l'écoulement. La pression qui est mesurée par le tube de Pitot est donc la pression totale " p_{t_2} " après le choc lorsque celui-ci intervient dans un écoulement avec $M_\infty = M_2 = 6.7$ et " p_1 " = $p_\infty = p_2 = 1 \text{ atm}$. Utilisant les tables pour déterminer la valeur du rapport " p_1/p_{t_2} " = 0.01716, il vient

$$p_{\text{Pitot}} = "p_{t_2}" = \frac{p_\infty}{0.01716} = 58.27 \text{ atm}$$

Vu la théorie exacte des chocs obliques utilisée au point iv., M_2 est légèrement inférieur à M_∞ , un tube de Pitot placé sur la surface 2 donnerait donc l'information relative à M_2 et pas à la vitesse réelle de l'avion M_∞ . Dans ce cas, le Pitot mesurerait (avec $M_2 = 6.31$, " p_1/p_{t2} " = 0.01933 et " p_1 " = $p_2 = 1.07$ atm),

$$p_{Pitot} = \frac{1.07}{0.01933} = 55.67 \text{ atm}$$

A moins d'utiliser cette valeur et d'arriver à remonter la démarche du point iv. pour en déduire M_∞ , il est préférable de placer le Pitot sur la pointe du nez.