Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2014

MECA0025-1 - MÉCANIQUE DES FLUIDES
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom et prénom.
Les formulaires officiels et les tables NACA peuvent être consultés.

Question I

Les conditions aux limites dynamiques à appliquer à l'interface entre deux fluides non miscibles s'écrivent

$$\begin{cases} [\sigma_{xz}] + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ [\sigma_{yz}] + \dfrac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 \\ [-p + \sigma_{zz}] = \sigma \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) \end{cases}$$

i. Expliquez l'origine de ces relations ainsi que la signification et les dimensions de **tous** les symboles qui y apparaissent.
ii. À la lumière de ces relations, expliquez l'effet Marangoni.
iii. En appliquant ces conditions dans le cas statique, expliquez pourquoi il faut exercer une force importante pour écarter deux plaques parallèles séparées par une fine couche fluide. Établissez l'expression de cette force.

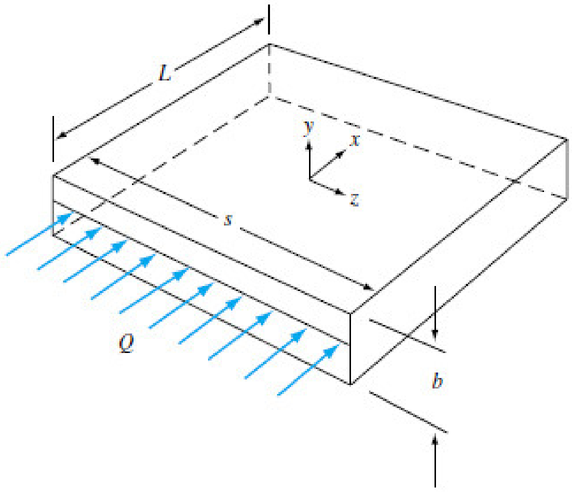
Question II

Définissez aussi complètement que possible les notions suivantes :

i. onde de gravité (*'gravity wave' ou 'surface gravity wave'*) ;
ii. régime de Stokes ;
iii. cône de Mach ;
iv. loi logarithmique de paroi (*'logarithmic law of the wall'*) ;
v. tenseur des tensions de Reynolds ;
vi. simulation LES.

Question III

De l'eau à la température ambiante et à la pression atmosphérique ($\mu = 10^{-3}$ N $\cdot$ s/m^2, $\rho =$ 1000 kg/m^3) s'écoule dans un canal rectangulaire horizontal de longueur $L = 10$ cm, de largeur $s =$ 1 cm et de hauteur $b = 0.30$ mm. Le débit volumique varie sinusoïdalement selon $Q(t) = q\sin(2\pi ft)$ où $q = 0.50$ ml/s et $f = 20$ Hz.



i. Dans la configuration étudiée, l'écoulement peut être considéré comme laminaire. Justifiez cette simplification en faisant appel à un nombre adimensionnel approprié.
ii. Dans la configuration étudiée, l'écoulement peut être considéré comme quasi-stationnaire, *i.e.* les dérivées temporelles peuvent être négligées et l'écoulement peut être étudié comme la succession d'états stationnaires correspondant à la valeur instantanée du débit s'écoulement dans le dispositif. Justifiez cette simplification en faisant appel à un nombre adimensionnel approprié.
iii. Sous les hypothèses ci-dessus et en négligeant les effets de bords, déterminez la distribution de la vitesse dans le canal en fonction des dimensions de celui-ci, de la viscosité et du gradient longitudinal de pression requis pour forcer l'écoulement. Écrivez l'expression analytique sans utiliser les valeurs numériques fournies.
iv. Déterminez la relation analytique entre le débit instantané Q et le gradient de pression. Estimez la valeur numérique de la vitesse maximale de l'écoulement.
v. Déterminez l'expression analytique de la tension de cisaillement τ_w agissant sur les parois en fonction du temps. Estimez la valeur numérique de la tension maximale agissant sur les parois du canal.
vi. Déterminez l'expression analytique du taux de dissipation de l'énergie mécanique au sein du canal.

Question IV

Une buse de Laval est reliée à un réservoir de grandes dimensions contenant de l'air (assimilé à un gaz parfait avec $R = 287$ J/(kg $\cdot$ K), $\gamma = 1.4$) à la pression p_0 et à la température de 300 K. La sortie de la buse débouche dans l'air à la pression atmosphérique. L'aire de la section de sortie est de 30 cm^2. La section au niveau du col est de 10 cm^2.

i. Déterminez la gamme des pressions p_0 permettant d'éviter tout choc dans et en-dehors de la buse.
ii. Déterminez le débit maximum d'air pouvant s'écouler dans la tuyère dans les conditions identifiées au point i.

Question V

Une explosion se produit dans l'air (assimilé à un gaz parfait avec $R = 287$ J/(kg $\cdot$ K), $\gamma = 1.4$) initialement au repos dans des conditions normales de température et de pression (p=1 bar, T=298.15 K). L'explosion produit une onde de choc sphérique, assimilée localement à un choc normal, qui se propage radialement. À l'instant considéré, la pression à l'intérieur de l'onde de choc est de 14 bar.

Estimez la vitesse de propagation de l'onde de choc et la vitesse de l'air juste à l'intérieur de l'enveloppe de celui-ci.

Si vous devez lire des informations dans les tables, n'effectuez aucune interpolation mais utilisez systématiquement la valeur la plus proche.

SOLUTION TYPE

Question I

Voir notes de cours.

Question II

Voir notes de cours.

Question III

i. Pour déterminer le régime d'écoulement, il convient d'évaluer le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U b}{\mu}$$

Remarquons que, dans l'écoulement considéré, si on ignore les effets de bords, la seule dimension caractéristique intervenant dans l'écoulement est la dimension transversale b. C'est donc elle qui apparaît dans les nombres adimensionnels caractérisant l'écoulement.

La vitesse caractéristique U peut être fixée à partir de la connaissance du débit maximum q selon

$$U = \frac{q}{bs} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{0.0003 \cdot 0.01} \approx 0.167 \text{ m/s}$$

De sorte que

$$Re = \frac{\rho U b}{\mu} \approx \frac{1000 \cdot 0.167 \cdot 0.0003}{10^{-3}} = 50 \ll 2300$$

L'écoulement est donc laminaire.

ii. Pour évaluer la validité de l'approximation quasi-stationnaire, on forme le nombre de Strouhal

$$Str = \frac{b}{U\tau} = \frac{fb}{U} = \frac{20 \cdot 0.0003}{0.167} = 0.036 \ll 1$$

Ce nombre étant bien inférieur à l'unité, la dérivée temporelle peut être négligée dans l'équation de la quantité de mouvement et l'écoulement est quasi-stationnaire.

iii. Ignorant les effets de bords, on recherche une solution du type $\mathbf{u} = u(y)\mathbf{e}_x$. Cette solution vérifie automatiquement l'équation de continuité. L'équation de bilan de la quantité de mouvement, dans sa forme stationnaire, conduit à

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + gy \end{cases}$$

Par dérivation de la seconde équation, on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho g y\right] = 0$$

de sorte que le gradient longitudinal de pression est indépendant de y. Par la première équation, il vient dès lors

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2$$

En exploitant les conditions aux limites $u(0) = u(b) = 0$, il vient

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y\,(b-y)$$

iv. En intégrant la vitesse sur la section de passage, il vient

$$Q = \int_0^s dz \int_0^b u(y) dy = -\frac{b^3 s}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{$\spadesuit$}$$

qui constitue la relation recherchée.
En exploitant cette relation, le profil de vitesse peut être exprimé sous la forme

$$u(y) = \frac{6Q}{b^3 s} y\,(b-y)$$

On en déduit que la vitesse maximale est donnée par

$$u_{max} = u(b/2) = \frac{3Q_{max}}{2bs} = \frac{3U}{2} = 0.250 \text{ m/s}$$

v. La tension visqueuse sur chacune des parois horizontales est donnée par

$$\tau = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \frac{6\mu Q}{b^2 s}$$

La valeur maximale est dès lors aisément calculée

$$\tau_{max} = \frac{6\mu q}{b^2 s} = 3.33 \text{ N/m}^2$$

vi. Le taux de dissipation de l'énergie mécanique peut être calculée de deux façons, soit en évaluant la dissipation visqueuse soit via la perte de charge.
En adoptant la première approche, on a

$$\begin{aligned} D &= Ls \int_0^b \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy \\ &= Ls\mu \int_0^b \left[\frac{6Q}{b^3 s}(b-2y)\right]^2 dy = \frac{12\mu L Q^2}{b^3 s} \end{aligned}$$

En utilisant la seconde approche, on a, de même, en utilisant ($\spadesuit$)

$$\begin{aligned} D &= -Q\Delta p = -QL\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ &= -QL\frac{-12\mu Q}{b^3 s} = \frac{12\mu L Q^2}{b^3 s} \end{aligned}$$

Question IV

i. Tout risque de choc sera écarté si l'écoulement reste sous-sonique en tout point ou si la tuyère est adaptée.
Si le col est sonique, on a $A^\star = 10$ cm^2. À la sortie, où la section $A = 30$ cm^2, on a $A/A^\star = 3$, ce qui peut correspondre à (en arrondissant dans les tables) un nombre de Mach égal à 0.2 ou 2.64.
Examinons d'abord la première option. Un nombre de Mach égal à 0.2 correspond à $p/p_0 = 0.9725$. La pression de sortie étant égale à la pression atmosphérique, on en déduit que la pression totale p_0, *i.e.* la pression régnant dans le réservoir où l'air est au repos, est égale à

$$p_0 = \frac{p}{0.9725} = 1.028 \text{ atm} = 1.04\,10^5 \text{ Pa}$$

Si la tuyère est adaptée et que le nombre de Mach de sortie est égal à 2.64, on sait que $p/p_0 = 0.0471$. La pression totale correspondante est donc

$$p_0 = \frac{p}{0.0471} = 21.23 \text{ atm} = 2.15\,10^6 \text{ Pa}$$

En conclusion, il ne se produira aucun choc ni à l'intérieur ni à l'extérieur de la tuyère si $p_0 \leq 1.04\,10^5$ Pa ou si $p_0 = 2.15\,10^6$ Pa.

ii. Le débit maximum est atteint lorsque le régime est supersonique dans le divergent. Ce régime est atteint sans choc si la tuyère est adaptée, *i.e.* si $p_0 = 1.04\,10^5$ Pa.

Dans ce cas, puisque le col est sonique, on relève que la pression et la température au niveau du col sont données par

$$p = 0.5283 p_0 = 1.14\,10^6 \text{ Pa}$$

$$T = 0.8333 T_0 = 249.99 \text{ K}$$

ce qui correspond à

$$\rho = \frac{p}{RT} = 15.84 \text{ kg/m}^3$$

$$a = \sqrt{\gamma RT} = 316.93 \text{ m/s}$$

Le débit massique au travers de la tuyère adaptée est donc

$$W = \rho A a = 5.02 \text{ kg/s}$$

Question V

La situation peut être décrite par rapport à un référentiel absolu ou en se plaçant dans un repère en mouvement avec l'onde de choc.

Dans le premier référentiel, l'onde de choc se propage à une vitesse c. Les conditions normales de température et de pression règnent en amont du choc, *i.e.* p_1 = 1 bar et T = 298.15 K. En aval, on observe une pression p_2 = 14 bar et l'air est en mouvement à une vitesse u_2 supposée normale au choc.

Dans un référentiel en mouvement avec le choc, les conditions de pression et température de part et d'autre du choc sont identiques à celles décrites ci-dessus. L'air situé du côté amont se dirige vers le choc à la vitesse $u_1 = c$ du choc. En aval, la vitesse relative est réduite à $u_2 - c$.

Selon les tables, un choc normal entraînant une augmentation de la pression selon le rapport $p_2/p_1 = 14$ fait passer l'écoulement de $M_1 = 3.48$ à $M_2 = 0.4519$. Dans le même temps, la température augmente dans le rapport $T_2/T_1 = 3.2878$. à l'intérieur de l'envelope du choc, la température est donc

$$T_2 = 3.2878\ T_1 = 980.26 \text{ K}$$

En amont du choc, on calcule aisément

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 346.12 \text{ m/s}$$

ce qui permet de calculer la vitesse de propagation de l'onde de choc selon

$$M_1 = \frac{c}{a_1} \qquad \Rightarrow \qquad c = M_1 a_1 = 1204.5 \text{ m/s}$$

En aval du choc, on a

$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 627.59 \text{ m/s}$$

et

$$M_2 = \frac{u_2 - c}{a_2} \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = c + M_2 a_2 = 1488.11 \text{ m/s}$$

Remarquons que l'onde de choc se propageant dans l'air au repos entraîne l'air derrière elle à une vitesse relative $u_2 - c = 283.61$ m/s.