

MÉCANIQUE RATIONNELLE

Modèle mathématique de Newton

ÉRIC J. M. DELHEZ

Professeur à l'Université de Liège

Table des matières.

Introduction.	1
1 Dynamique du point matériel.	5
1.1 Le modèle de Newton.	5
1.2 Forces appliquées.	8
1.3 Mouvement libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur.	10
1.3.1 Chute libre.	10
1.3.2 Projectile.	12
1.3.3 Exercices proposés.	13
1.4 Mouvement dans un champ électromagnétique.	14
1.4.1 Mouvement dans un champ électromagnétique constant et uniforme.	15
1.4.2 Exercice.	18
1.5 Liaisons et forces de liaisons.	19
1.6 Oscillateur harmonique et oscillateur amorti.	22
1.6.1 Réponse libre.	22
1.6.2 Frottement sec vs. amortissement fluide.	25
1.6.3 Réponse à une excitation harmonique.	28
1.6.4 Exercices proposés.	31
1.7 Oscillateurs harmoniques couplés.	32
1.7.1 Fréquences et modes propres.	32
1.7.2 Exercice proposé.	34
1.8 Cinématique du point matériel.	35
1.8.1 Coordonnées généralisées et trajectoire.	35
1.8.2 Repère de Frenet.	35
1.8.3 Changement de système de référence.	37
1.8.4 Formule de Poisson.	40
1.8.5 Décomposition des vitesses et accélérations.	43
1.8.6 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques et sphériques.	43
1.8.7 Exercice.	46
1.9 Repère inertiel.	47
1.9.1 Forces fictives d'inertie.	47

1.9.2	Mouvements au voisinage de la Terre et accélération de la pesanteur.	48
1.9.3	Pendule de Foucault.	51
1.9.4	Exercice.	54
2	Système de points matériels.	57
2.1	Grandeurs résultantes.	57
2.1.1	Grandeurs cinématiques résultantes.	57
2.1.2	Grandeurs dynamiques résultantes. Forces externes et forces internes.	58
2.2	Théorème de la quantité de mouvement et centre d'inertie.	59
2.3	Théorème du moment cinétique.	61
2.4	Théorème de l'énergie cinétique.	61
2.4.1	Forces et bilan énergétique.	62
2.4.2	Conservation de l'énergie.	64
2.5	Théorèmes généraux et étude du mouvement du point matériel.	65
2.6	Système à masse variable.	66
2.6.1	Exercices.	70
2.6.2	Exercices proposés.	73
2.7	Statique.	75
2.8	Expressions intégrales des théorèmes généraux.	75
3	Analyse du mouvement du point matériel.	77
3.1	Variables adimensionnelles.	78
3.1.1	Exercices.	80
3.2	Solution des équations du mouvement.	82
3.2.1	Solution analytique exacte.	82
3.2.2	Résolution analytique approchée.	83
3.2.3	Intégration numérique.	84
3.3	Intégrales premières du mouvement.	85
3.4	Diagramme de potentiel.	86
3.5	Mouvement sur une courbe de guidage fixe.	89
3.5.1	Pendule simple.	89
3.5.2	Plan de phase.	94
3.5.3	Exercices.	97
3.5.4	Exercices proposés.	104
3.6	Équilibre et stabilité.	105
3.6.1	Analyse linéaire et petites perturbations.	106
3.6.2	Stabilité et diagramme de potentiel.	108
3.6.3	Exercice.	111
3.6.4	Exercices proposés.	112
3.6.5	Analyse non linéaire complète.	113
3.6.6	Autres concepts de stabilité.	115
3.6.7	Étude de sensibilité, bifurcation.	116
3.7	Mouvement sur une courbe de guidage mobile.	117

3.7.1	Pendule rotatif.	117
3.7.2	Exercices.	125
3.7.3	Exercices proposés.	129
3.8	Mouvement sur une surface de guidage.	131
3.8.1	Pendule sphérique.	131
3.8.2	Exercices.	133
3.9	Mouvement dans un champ de force centrale.	135
3.9.1	Force centrale attractive en r^{-2}	138
3.9.2	Systèmes réels à deux corps.	143
3.9.3	Lois de Kepler sur le mouvement des planètes.	145
3.9.4	Application au mouvement des satellites artificiels.	146
3.9.5	Exercices.	149
3.9.6	Exercices proposés.	171
3.10	Mouvement dans un champ électromagnétique non uniforme.	174
3.10.1	Théorie des aurores polaires.	174
3.10.2	Exercices.	187
3.10.3	Exercice proposé.	189
4	Dynamique du solide indéformable.	191
4.1	Hypothèse du milieu continu.	191
4.2	Cinématique du solide.	192
4.3	Centre d'inertie d'un solide.	194
4.3.1	Principe de superposition.	194
4.3.2	Premier théorème de Guldin.	195
4.3.3	Second théorème de Guldin.	195
4.3.4	Exercices.	196
4.4	Théorème C.	200
4.5	Tenseur d'inertie d'un solide indéformable.	202
4.5.1	Moments d'inertie, axes principaux d'inertie.	204
4.5.2	Théorème de transport.	206
4.5.3	Exercices.	207
4.5.4	Exercices proposés.	212
4.6	Théorèmes généraux pour le mouvement autour du centre d'inertie.	213
4.7	Indépendance des théorèmes généraux pour le mouvement du solide rigide.	214
4.8	Mouvement du solide autour d'un point fixe.	215
4.9	Résultantes des forces appliquées à un solide.	216
4.10	Contact entre deux solides.	219
4.10.1	Mouvement relatif de deux solides.	219
4.10.2	Résultantes des forces de contact entre deux solides.	221
4.10.3	Lois de frottement pour le contact entre deux solides.	222
4.10.4	Puissance développée par les forces de contact.	225

5 Solides en mouvement plan.	227
5.1 Hypothèse du mouvement plan.	227
5.2 Oscillations pendulaires d'un solide plan.	228
5.3 Exercices.	233
5.4 Exercices proposés.	237
5.5 Roulement sans glissement.	238
5.5.1 La grande boucle.	238
5.5.2 Roulement avec ou sans glissement.	241
5.5.3 Exercices.	245
5.5.4 Exercices proposés.	253
5.6 Systèmes composés de plusieurs éléments.	253
5.6.1 Théorèmes applicables.	253
5.6.2 Exercices.	254
5.6.3 Exercices proposés.	259
5.7 Hiérarchie de modèles.	261
5.7.1 Point matériel vs. solide rigide.	261
5.7.2 Étude du comportement de la suspension d'un véhicule.	263
6 Mouvement des solides dans l'espace.	271
6.1 La boule de bowling.	271
6.2 Équations d'Euler.	274
6.2.1 Définition.	274
6.2.2 Rotation libre d'un solide autour de son centre d'inertie.	275
6.2.3 Mouvement d'un solide selon Euler-Poinsot.	276
6.2.4 Exercice proposé.	280
6.3 Orientation d'un solide dans l'espace : angles d'Euler.	280
6.4 La toupie.	285
6.4.1 Étude générale.	285
6.4.2 Exercices.	295
6.4.3 Exercices proposés.	296
6.5 Le gyroscope.	297
6.5.1 Effet gyroscopique.	297
6.5.2 Mesure de la vitesse angulaire.	302
6.5.3 Équilibrage des systèmes en rotation.	303
6.6 Exercices.	307
6.7 Exercices proposés.	315
A Vecteurs et tenseurs.	317
B Courbes usuelles en coordonnées polaires.	321
C Fonctions elliptiques de Jacobi.	325
D Réponses des exercices proposés.	329
Bibliographie.	337

INTRODUCTION.

La démarche du physicien ou de l'ingénieur, comme celle qui gouverne notre approche des problèmes quotidiens, est basée sur trois étapes essentielles : l'observation, l'analyse et la conclusion. Dans ce cheminement du raisonnement, la phase d'analyse est capitale. Elle doit permettre d'identifier les éléments principaux intervenant dans le problème étudié et les relations de causalité qui les lient. Ce faisant, on construit une image simplifiée du problème complexe abordé en le dépouillant de tout ce qui est inutile ou accessoire. En un mot, on élabore un *modèle* de la réalité.

Les modèles peuvent être construits de différentes façons. Il peut s'agir d'un modèle analogique qui réalise une correspondance entre tout ou partie du problème étudié et un autre système dont le comportement est bien connu. Ainsi, on utilise parfois des modèles électriques ou rhéologiques de la propagation de la chaleur ou du flux de l'induction magnétique. Dans les problèmes de conception de structures de génie civil ou d'aéronautique, on construit plutôt des modèles réduits, répliques des systèmes réels à une échelle permettant des essais irréalisables ou trop coûteux avec les structures réelles. La conception d'un modèle mathématique consiste quant à elle à représenter le système réel au moyen d'un ensemble de variables d'état dont l'évolution est gouvernée par des équations d'évolution.

Quel que soit le type de modèle utilisé, celui-ci se substitue en quelque sorte à la réalité si bien que les conclusions sont le résultat de l'analyse du modèle plutôt que du système initial. Il va sans dire que la validité des conclusions dépend des aspects et des processus pris en compte dans le modèle. Un même système physique peut être décrit par une hiérarchie de modèles qui, au prix d'une complexité et d'une difficulté croissantes, permettent de cerner la réalité de façon de plus en plus précise.

Le modèle mathématique de Newton sur lequel se fonde la mécanique rationnelle classique est basé sur les notions de masse, de longueur et de temps absolus. Ces grandeurs, en fonction desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer, sont supposées indépendantes de l'observateur qui les mesure. Ceci signifie, en particulier, que la masse d'un corps est une grandeur réelle, positive et invariante. Cette notion correspond à celle que nous avons de notre expérience courante. De même, les concepts de longueur et de temps sont conformes à notre perception quotidienne.

Le modèle newtonien explique parfaitement la plupart des phénomènes que l'on peut observer. Il n'est pourtant pas le seul modèle possible et possède ses limites. Ainsi, si les vitesses mises en jeu sont comparables à celle de la lumière, la masse, la longueur et le temps ne peuvent plus être considérés comme absolus

mais dépendent de la vitesse du corps étudié par rapport à l'observateur. L'explication de ces phénomènes demande de faire appel à la mécanique relativiste. Dans ce cadre, la mécanique newtonienne apparaît comme une première approximation valable seulement lorsque les vitesses sont faibles vis-à-vis de celle de la lumière, hypothèse généralement valable en ce qui concerne les phénomènes rencontrés par l'ingénieur.

D'autres limitations apparaissent dans le domaine des phénomènes microscopiques qui ne peuvent être expliqués que par la mécanique quantique.

Dans certains cas, les concepts de base restent valables mais c'est la description du système qui est inadaptée. Par exemple, lorsqu'on est en présence d'un système présentant un très grand nombre de degrés de liberté, la description de chacun de ceux-ci est souvent impossible. Ainsi, en théorie cinétique des gaz ou en mécanique des fluides, le comportement du système ne peut être prédit en détail bien que le comportement de chacune des particules constituant le gaz ou le fluide obéisse à la dynamique newtonienne. En réalité, le nombre de collisions et d'interactions entre ces particules est tel que la dynamique réelle du système est infiniment complexe et ne peut être décrite qu'en moyenne dans le cadre de la mécanique statistique.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants ingénieurs civils et fait suite à des cours de physique générale et d'analyse mathématique, y compris l'analyse vectorielle.

Dans cette nouvelle édition, les bases théoriques de cinématique et de dynamique sous-tendant l'étude mathématique des systèmes mécaniques par le modèle de Newton sont présentées progressivement. La présentation se concentre initialement sur la dynamique du point matériel. Ensuite, les systèmes de points matériels sont considérés. Les derniers chapitres sont consacrés à l'étude du solide indéformable, d'abord dans le cadre de l'hypothèse du mouvement plan puis dans l'espace. Un large éventail de méthodes d'analyse et de modélisation des systèmes sont également introduits tout au long du texte.

De nombreux exercices ou applications à des problèmes classiques de mécanique sont intercalés entre les éléments plus théoriques afin de faciliter la compréhension et l'appropriation des concepts. Les solutions types des exercices résolus sont volontairement limitées aux principales étapes du raisonnement et de la résolution afin d'obliger l'étudiant à participer à la résolution de l'exercice, explorant par lui-même les mauvaises pistes autant que les bonnes. Par ailleurs, des listes d'exercices non résolus sont proposées en conclusion des principales sections (Les réponses sont portées en annexe.). L'étudiant y trouvera l'occasion de faire le bilan de sa compréhension des principes et des techniques de la mécanique.

Bien que la très grande majorité des problèmes pratiques de l'ingénieur soient aujourd'hui abordés numériquement, cet ouvrage fait délibérément la part belle aux méthodes analytiques. Ainsi, tous les exercices et les applications pratiques qui sont traités ou suggérés ont été choisis, non seulement pour leur caractère pédagogique et illustratif des concepts et principes de la mécanique, mais aussi parce qu'ils peuvent être étudiés, au moins partiellement, analytiquement. Alors que ce choix pourrait surprendre, il exprime la volonté de l'auteur de faire appréhender à l'étudiant la force et les limitations réelles de l'approche analytique tout en lui donnant l'occasion d'exercer dans un contexte appliqué les compétences acquises dans le cadre de ses cours de mathématique. Le lecteur intéressé ou curieux est cependant invité à vérifier

les résultats obtenus par voie analytique en recherchant numériquement la loi du mouvement pour des valeurs particulières des paramètres et des conditions initiales du problème.