

## Chapitre 5

# Solides en mouvement plan.

### 5.1 Hypothèse du mouvement plan.

On dit d'un solide qu'il est animé d'un *mouvement plan* quand trois de ses points non alignés se meuvent dans un plan fixe. Dans ces conditions, le mouvement de chaque point du solide se fait constamment dans un même plan et il en est de même du mouvement de son centre d'inertie. Le vecteur de Poisson du solide  $\omega$  est alors toujours perpendiculaire au plan du mouvement. On a donc

$$\omega = \omega \mathbf{k} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{k}$  est un vecteur unitaire constant tel que le centre d'inertie C du solide se déplace constamment dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , *i.e.*

$$\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (5.2)$$

Dans la plupart des applications, on supposera que l'axe  $\mathbf{k}$  est un axe principal d'inertie du solide. Dès lors, introduisant des axes orthonormés  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  dans le plan du mouvement et centrés au centre d'inertie C ou en un point fixe O du solide et complétant le trièdre par un axe  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$  perpendiculaire au plan du mouvement, le tenseur d'inertie du solide est de la forme

$$\mathbf{J}_B = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + J_\pi (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + J_k \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (5.3)$$

où B désigne le point C ou le point O et où  $J_1, J_2, J_k, J_\pi$  sont les moments et produit d'inertie calculés par rapport à des axes centrés en ce point.

Le moment cinétique et l'énergie cinétique s'écrivent quant à eux

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{J}_B \cdot \omega = J_k \omega \mathbf{k} \quad (5.4)$$

$$T_B = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{H}_B = \frac{1}{2} J_k \omega^2 \quad (5.5)$$

Si  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{M}_B$  et  $\mathcal{P}_B$  désignent respectivement la résultante des forces extérieures, leur moment résultant et la puissance résultante qu'elles développent, on a, en vertu des théorèmes généraux pour un système rigide,

$$m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\mathbf{H}_B}{dt} = \mathbf{M}_B \quad (5.7)$$

$$\frac{dT_B}{dt} = \mathcal{P}_B \quad (5.8)$$

On voit immédiatement que, pour que le mouvement plan soit possible, la résultante des forces appliquées doit être dans le plan du mouvement et leur moment résultant perpendiculaire à celui-ci.

Dans cet chapitre, nous étudierons le mouvement de solides sous l'*hypothèse du mouvement plan*, c'est-à-dire en supposant que toutes les hypothèses sont vérifiées pour assurer un mouvement plan des solides. Pratiquement, nous ignorerons donc systématiquement les degrés de liberté perpendiculaires au plan du mouvement ainsi que les forces de liaisons éventuelles nécessaires pour assurer ce type de mouvement.

Un solide en mouvement plan possède, au maximum, trois degrés de liberté. En effet, la détermination de la position de trois points non alignés requiert la connaissance des six coordonnées des projections de ces trois points sur un plan fixe quelconque parallèle au plan du mouvement, les élévations des points au-dessus de ce plan restant constantes en vertu de la rigidité du solide. Il existe par ailleurs trois relations de liaisons entre les coordonnées précitées dont trois seulement sont indépendantes.

Comme le montrent les expressions (5.1) et (5.2), les trois degrés de liberté correspondent à deux degrés de liberté de translation du centre d'inertie du solide et un degré de liberté de rotation autour de C.

Dans le cadre de l'hypothèse du mouvement plan, l'équation (5.6) donne deux équations scalaires, l'équation (5.7) en fournit une et l'équation (5.8) est une conséquence de la précédente.

## 5.2 Oscillations pendulaires d'un solide plan.

On considère une plaque rigide qui oscille dans un plan vertical fixe autour d'un de ses points O fixe (Fig. 5.1).

Si  $\mathbf{k}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la plaque, on a

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (5.9)$$

où  $\theta$  est défini comme indiqué à la figure 5.1.

Le mouvement du solide se résume à un mouvement de rotation autour de O. Ce mouvement peut être déterminé en appliquant le théorème du moment cinétique dans des axes inertiels centrés en O.

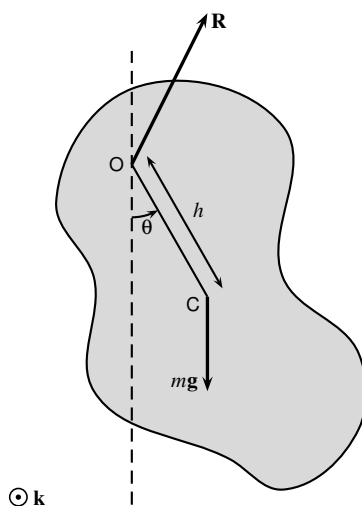


FIGURE 5.1

Soit  $J_k$  le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe de vecteur unitaire  $\mathbf{k}$  passant par son centre d'inertie. On pose souvent

$$J_k = mp^2 \quad (5.10)$$

$m$  étant la masse totale de la plaque et  $p$  son *rayon de giration*. Soit  $h$  la distance du centre d'inertie au point fixe O. Le moment cinétique  $\mathbf{H}_O$  peut être obtenu en appliquant le théorème C pour le moment cinétique, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \mathbf{H}_C + m\mathbf{OC} \wedge \dot{\mathbf{OC}} \\ &= \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} \\ &= m(p^2 + h^2)\dot{\theta}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ou, le point O appartenant au solide, en utilisant (5.4) et le théorème C pour le tenseur d'inertie, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= [\mathbf{J}_C + m(\|\mathbf{c}\|^2\mathbf{I} - \mathbf{c}\mathbf{c})] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= m(p^2 + h^2)\dot{\theta}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Après projection sur l'axe  $\mathbf{k}$ , l'équation (5.7) donne

$$\frac{d}{dt}[m(h^2 + p^2)\dot{\theta}] = -mgh \sin \theta \quad (5.13)$$

ou

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (5.14)$$

en posant

$$\omega^2 = \frac{gh}{h^2 + p^2} \quad (5.15)$$

(Le moment par rapport à O de la force de liaison est évidemment nul.)

Le système est équivalent à un pendule simple de longueur

$$\ell = \frac{h^2 + p^2}{h} \quad (5.16)$$

Intégrant une fois l'équation différentielle du mouvement, on obtient l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega^2 \cos \theta = 2\omega^2 e \quad (5.17)$$

qui est la même que celle d'un pendule simple de longueur  $\ell$ . On peut aussi obtenir cette équation directement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique et en introduisant le potentiel dont dérive la force de pesanteur.

La discussion du mouvement est menée exactement comme dans le cas du pendule simple<sup>1</sup> (Cf. § 3.5.1).

Une fois la loi du mouvement  $\theta = \theta(t)$  connue, on peut déterminer la vitesse et l'accélération du centre d'inertie. On en déduit la réaction  $\mathbf{R}(t)$  s'exerçant au point de support O à l'aide de l'équation (5.6).

Le point  $O'$  situé sur la droite OC à une distance  $\ell$  de O est appelé *centre d'oscillations*. On peut intervertir le centre de suspension O et le centre d'oscillations  $O'$  sans altérer la période du mouvement. En effet, si  $O'$  était fixe, l'équation du mouvement serait (Fig. 5.2)

$$\left(p^2 + \frac{p^4}{h^2}\right)\ddot{\theta} = -g \frac{p^2}{h} \sin \theta \quad (5.18)$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (5.19)$$

pour la même valeur de  $\omega$ .

---

1. En particulier, l'intégration des équations du mouvement peut être poursuivie et la loi du mouvement peut être exprimée en fonction d'une intégrale elliptique. Pour  $e < 1$ , la période du mouvement est alors donnée par

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1+e}{2} \sin^2 \varphi}}$$

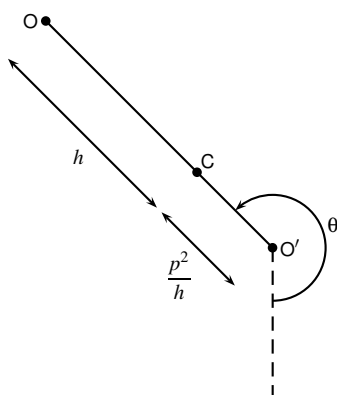


FIGURE 5.2

Le point  $O'$  défini ci-dessus possède une autre propriété, plus intéressante en pratique. Pour la découvrir, supposons qu'une force extérieure  $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_\theta$  supplémentaire soit appliquée selon une ligne d'action perpendiculaire à  $\mathbf{OC}$  et passant par le point  $P$  situé sur la droite  $\mathbf{OC}$  à une distance  $d$  de  $O$  (Fig. 5.3).

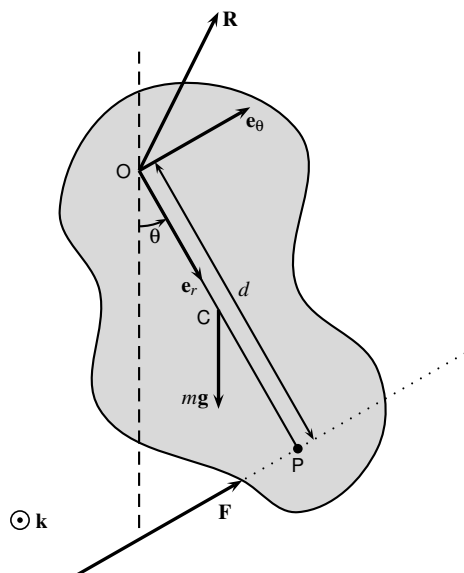


FIGURE 5.3

Dans ce cas, les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique rapportés à des axes inertiels centrés au point fixe  $O$  s'écrivent respectivement, en adoptant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement,

$$m\ddot{\mathbf{c}} = m(-h\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + h\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (5.20)$$

et

$$m(h^2 + p^2)\ddot{\theta} = -mgh \sin \theta + dF \quad (5.21)$$

Utilisant (5.21) pour éliminer  $\ddot{\theta}$  de (5.20), la réaction  $\mathbf{R}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{R} = -m(h\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \mathbf{e}_r + mg \frac{p^2}{h^2 + p^2} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{hd}{h^2 + p^2} - 1 \right) F \mathbf{e}_\theta \quad (5.22)$$

Dans le cas particulier où

$$d = \frac{h^2 + p^2}{h} = \ell \quad (5.23)$$

c'est-à-dire lorsque la force  $\mathbf{F}$  est appliquée au centre d'oscillations,  $F$  n'apparaît plus dans l'expression (5.22) de la réaction inconnue  $\mathbf{R}$ .

Pour expliciter les conséquences de ce résultat, supposons que la force  $\mathbf{F}$  représente la force exercée par un corps extérieur venant frapper violemment le solide étudié alors que celui-ci se trouve au repos ( $\dot{\theta} = 0$ ) dans sa configuration d'équilibre stable ( $\theta = 0$ ). Dans le cas général, la réaction exercée au point de support  $O$  est donnée, à l'instant initial, par

$$\mathbf{R} = -m\mathbf{g} + \left( \frac{hd}{h^2 + p^2} - 1 \right) F \mathbf{e}_\theta \quad (5.24)$$

Celle-ci peut prendre des valeurs très importantes et provoquer la rupture de la liaison si  $F$  est très grand, *i.e.* si le choc est très violent. Par contre, si le choc a lieu au point  $O'$ , la force de réaction initiale est égale (en norme) au seul poids du solide étudié, quelle que soit l'intensité du choc. Pour cette raison le point  $O'$  est aussi appelé le *centre de percussion*.

La position du centre de percussion est un paramètre important pour la conception des raquettes de tennis ou des clubs de golf. En s'arrangeant pour que le point d'impact normal de la balle soit situé au centre de percussion, on réduit les efforts  $\mathbf{R}$  transmis au poignet du joueur.

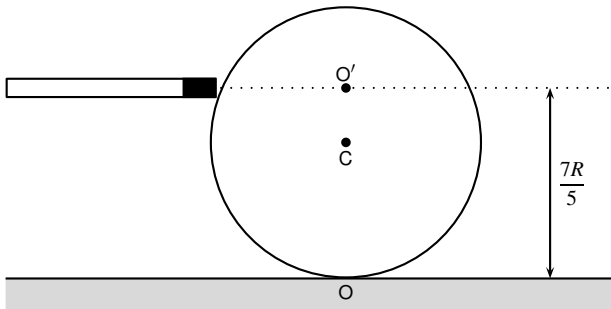


FIGURE 5.4

De même, on peut éviter le glissement d'une boule de billard en frappant celle-ci horizontalement selon un axe passant par le centre de percussion (Fig. 5.4). En effet, la réaction initiale au point de contact avec la table ne comporte alors pas de composante tangentielle et est donc compatible avec le roulement sans glissement quels que soient la force exercée et le coefficient de frottement. Dans le cas d'une boule sphérique de rayon  $R$  homogène, le centre de percussion est situé à une hauteur

$$R + \frac{J_k}{mR} = R + \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR} = \frac{7}{5}R \quad (5.25)$$

au-dessus du plan.

### 5.3 Exercices.

- [77] Une échelle de longueur  $\ell$  et de masse  $m$  posée sur un plancher horizontal et appuyée contre un mur vertical glisse le long de ceux-ci sans frottement dans un plan vertical sous l'action de la pesanteur (Fig. 5.5). Étudier le mouvement de l'échelle. Déterminer si son extrémité M peut décoller du mur lorsque la position de l'échelle initialement au repos en position verticale contre le mur est très légèrement perturbée.

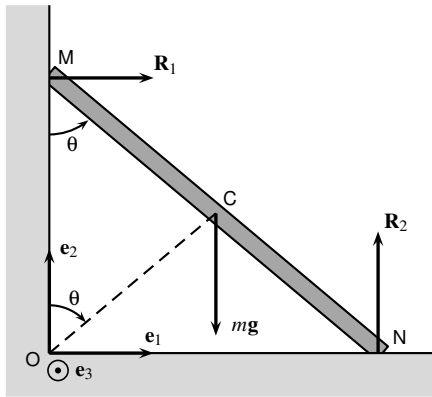


FIGURE 5.5

L'échelle possède un seul degré de liberté et son mouvement peut être décrit par les variations de l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec le mur vertical.

Par application du théorème de l'énergie cinétique dans un repère inertiel centré en O, on en déduit immédiatement (le mouvement ayant lieu sans frottement et la force de pesanteur dérivant d'un potentiel), l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + \frac{1}{2} J_k \omega^2 + \frac{1}{2} mg \ell \cos \theta = T_O + V = E$$

où

$$\|\dot{\mathbf{c}}\| = \frac{1}{2} \ell \dot{\theta} ; \quad \omega = \dot{\theta} \mathbf{e}_3 ; \quad J_k = \frac{1}{12} m \ell^2$$

de sorte que

$$\frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g \ell \cos \theta = E$$

La constante  $E$  est déterminée par les conditions initiales. Si l'échelle est initialement au repos ( $\dot{\theta} = 0$ ) en position verticale ( $\theta = 0$ ), on doit avoir

$$E = \frac{1}{2} m g \ell$$

et donc

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell} (1 - \cos \theta)$$

Dans ces conditions, l'échelle est en équilibre instable. Si elle n'est pas rigoureusement verticale mais fait avec le mur un angle extrêmement faible, elle se met à glisser. On peut calculer les réactions  $\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{R}_2 = R_2 \mathbf{e}_2$  en utilisant le théorème de la quantité de mouvement. Après projection sur les axes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{m\ell}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= R_1 \\ -\frac{m\ell}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) &= R_2 - mg \end{aligned}$$

soit, en éliminant  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ ,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3mg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2) \\ R_2 &= \frac{mg}{4} (3 \cos \theta - 1)^2 \end{aligned}$$

L'échelle quitte le mur lorsque  $R_1$  s'annule, soit pour

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

Le guidage est alors interrompu. Pendant toute la durée de celui-ci,  $R_2 > 0$ .

**[78]** Une barre homogène de masse  $m$  et de longueur  $6a$  est posée sur un coin de table horizontale, perpendiculairement à l'arête, un tiers de la barre reposant sur la table. Montrer que la barre tourne d'abord autour de l'arête d'un angle égal à  $\arctg(\mu/2)$  (où  $\mu$  est le coefficient de frottement) avant de se mettre à glisser.

Dans la première phase du mouvement, la barre tourne autour de son point A fixe. Le vecteur de Poisson est

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3$$

Si  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire selon l'axe de la barre, on a (Fig. 5.6)

$$\mathbf{c} = a \mathbf{e}_r$$

Les équations (5.6) et (5.7) s'écrivent

$$ma(\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r) = \mathbf{R} + m \mathbf{g}$$