NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2021

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur cet énoncé votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'énoncé avec vos copies.

Question I

Soit les équations d'Euler

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

i. Indiquez à partir de quel théorème ces équations sont obtenues (sans établir celles-ci) et donnez la signification de toutes les grandeurs intervenant dans celles-ci.

ii. À partir des équations d'Euler, montrez que la configuration correspondant à la rotation libre (sans sollicitations extérieures) à vitesse constante d'un solide de révolution autour de son axe de symétrie de révolution est une configuration d'équilibre.

iii. Étudiez la stabilité de cette configuration d'équilibre.

Question II

On lance une boule de neige dans le champ de la pesanteur à partir d'un point fixe O avec une vitesse $\mathbf{v}_0$. La masse de la boule de neige varie suite à l'accumulation de la neige selon la loi

$$m = m_0\, \mathrm{e}^{\beta t}$$

où β est une constante strictement positive. On admet que la neige tombe tellement lentement que sa vitesse absolue peut être considérée comme nulle.

i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la boule de neige.

ii. Déterminez la loi du mouvement de la boule de neige par rapport au point O.

Tournez la page.

Question III

On étudie le mouvement plan d'une tige assimilée à un solide rectiligne de masse m et de longueur $2h$. Le centre d'inertie est situé au milieu de la tige. Le moment central d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement est noté J_C.

À l'instant initial, la tige est déposée sans vitesse initiale en position verticale instable sur un plan horizontal rugueux. On étudie la chute de la tige lorsque cette position est très légèrement perturbée.

Dans une première approche, on suppose que le frottement entre le plan et l'extrémité de la tige est suffisant pour que cette extrémité reste fixe. Lors de sa chute, la tige pivote donc simplement autour de son extrémité.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté de la tige et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) appropriée(s) pour en décrire le mouvement.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur la tige en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement.

iv. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertiel et déduisez-en une intégrale première scalaire dont vous préciserez la signification physique.

v. Déterminez la vitesse du centre d'inertie à la fin de la chute de la tige sur le plan horizontal.

Dans une seconde approche, on considère des conditions plus réalistes de frottement caractérisées par des coefficients de frottement statique et dynamique notés respectivement μ_s et μ. Le mouvement est plan et on suppose que l'extrémité de la tige reste en contact avec le plan.

vi. Montrez que, quelles que soient les valeurs (non nulles) de μ_s et μ, la chute de la tige présentera toujours une phase initiale pendant laquelle son extrémité ne glisse pas sur le plan.

vii. Dans l'hypothèse où le frottement est insuffisant pour empêcher l'extrémité de la tige de glisser, écrivez (sans la résoudre) l'équation permettant de déterminer l'inclinaison de la tige à partir de laquelle son extrémité commence à glisser.

viii. Dans le cas où l'extrémité de la tige glisse sur le plan horizontal, déterminez le nombre d'inconnues cinématiques et dynamiques du problème et écrivez (sans le résoudre) un système d'équations scalaires permettant de déterminer l'évolution temporelle de ces inconnues.

---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.

SOLUTION

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. L'équation différentielle décrivant le mouvement de la boule de neige s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ désigne la poussée résultant de la variation de la masse de la boule et $\mathbf{s}$ le vecteur position du centre d'inertie de la boule par rapport au point fixe O.
Sachant que la masse de la boule varie selon la loi $m(t) = m_0\, \mathrm{e}^{\beta t}$ et que la vitesse absolue de la neige qui tombe est nulle ($\mathbf{w} = -\dot{\mathbf{s}}$), on calcule aisément

$$\mathcal{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w} = \beta m_0\, \mathrm{e}^{\beta t}(-\dot{\mathbf{s}}) = -\beta m\dot{\mathbf{s}}$$

On a donc

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} - \beta m\dot{\mathbf{s}}$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{s}} + \beta\, \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}$$

ii. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène dont la solution générale peut être exprimée comme la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_h + \mathbf{s}_p$$

D'une part, le polynôme caractéristique de l'équation homogène s'écrit

$$z^2 + \beta z = z(z + \beta)$$

et possède les deux zéros simples $z = 0$ et $z = -\beta$ de sorte que

$$\mathbf{s}_h = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\, \mathrm{e}^{-\beta t}$$

où $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont des constantes.
D'autre part, on identifie facilement une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$\mathbf{s}_p = \frac{\mathbf{g}\,t}{\beta}$$

de sorte que

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\, \mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\mathbf{g}\,t}{\beta}$$

Les constantes peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{s}}(0) = \mathbf{v}_0$, ce qui donne

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad -\beta\mathbf{C}_2 + \frac{\mathbf{g}}{\beta} = \mathbf{v}_0$$

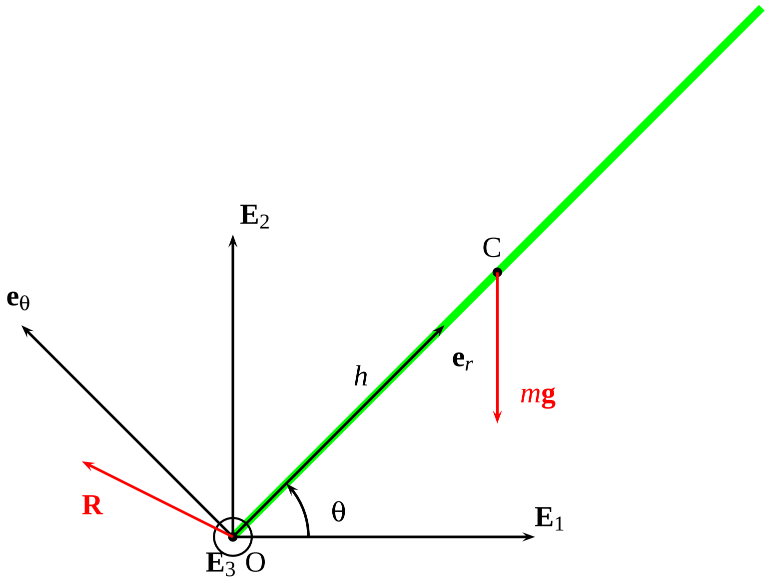
et donc

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{v}_0}{\beta} - \frac{\mathbf{g}}{\beta^2}$$

Finalement, la loi du mouvement s'écrit

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\beta} - \frac{\mathbf{g}}{\beta^2}\right)(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}) + \frac{\mathbf{g}\,t}{\beta}$$

Question III



i. En mouvement plan, un solide a au maximum 3 ddl. L'extrémité O de la tige étant fixe dans cette première partie, il y a deux liaisons et donc un seul ddl. Nous choisissons comme coordonnée généralisée l'angle θ que fait la tige par rapport à l'horizontale.

ii. Les forces agissant sur la tige sont

- la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force conservative appliquée au centre d'inertie de la tige et dirigée verticalement vers le bas;
- la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_2 + T\mathbf{E}_1$ appliquée en O et de direction inconnue dans le plan du mouvement.

iii. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = \mathbf{G}$$

soit

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = m\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où $\mathbf{s}_\mathrm{C} = h\mathbf{e}_r$ (voir figure) de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

et que le théorème s'écrit

$$mh\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - mh\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = -mg\mathbf{E}_2 + N\mathbf{E}_2 + T\mathbf{E}_1$$

iv. Le théorème de l'énergie cinétique au point fixe O s'écrit

$$\dot{T}_\mathrm{O} = P_\mathrm{O} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{O} + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = -\frac{dV_{m\mathbf{g}}}{dt}$$

puisque, d'une part, le point O est fixe et que, d'autre part, la force de pesanteur dérive d'un potentiel. On en tire l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$T_\mathrm{O} + V_{m\mathbf{g}} = E$$

où

$$V_{m\mathbf{g}} = mgh\sin\theta$$

et où
$$T_\mathrm{O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_\mathrm{O}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}J_\mathrm{O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(J_\mathrm{C}+mh^2)\dot{\theta}^2$$
puisque le vecteur de Poisson du crayon vaut
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{E}_3$$
et que le théorème de transport permet d'exprimer la composante selon $\mathbf{E}_3$ du tenseur d'inertie par rapport au point O :
$$J_\mathrm{O} = J_\mathrm{C}+mh^2$$
L'intégrale première s'écrit donc
$$\frac{1}{2}(J_\mathrm{C}+mh^2)\dot{\theta}^2 + mgh\sin\theta = E$$
La constante E peut être déterminée grâce aux conditions initiales ($\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$). On obtient $E = mgh$ et l'intégrale première s'écrit finalement
$$\frac{1}{2}(J_\mathrm{C}+mh^2)\dot{\theta}^2 + mgh\sin\theta = mgh \qquad (\diamondsuit)$$

v. L'équation ($\diamondsuit$) donne, quand $\theta = 0$,
$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_*^2 = \frac{2mgh}{J_\mathrm{C}+mh^2}$$
Au moment du contact avec le plan, on a donc
$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = -h\dot{\theta}_*\mathbf{E}_2 = -h\sqrt{\frac{2mgh}{J_\mathrm{C}+mh^2}}\,\mathbf{E}_2$$
où le choix du signe de la vitesse angulaire est en accord avec le fait que la vitesse du centre d'inertie doit être dirigée vers la bas quand la tige tombe.

vi. Le glissement commence quand $|T| > \mu_s|N|$ où T et N sont les composantes tangentielle et normale de la force de liaison calculées sans glissement.
On obtient, en projetant le théorème de la quantité de mouvement sur les axes $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_1$,
$$N = mg + mh\ddot{\theta}\cos\theta - mh\dot{\theta}^2\sin\theta$$
et
$$T = -mh\ddot{\theta}\sin\theta - mh\dot{\theta}^2\cos\theta$$
L'équation ($\diamondsuit$) permet d'exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ.
$$\dot{\theta}^2 = (1-\sin\theta)\frac{2mgh}{J_\mathrm{C}+mh^2}$$
Dérivant ($\diamondsuit$) par rapport au temps, on obtient aussi
$$\ddot{\theta} = -\cos\theta\frac{mgh}{J_\mathrm{C}+mh^2}$$
de sorte que, finalement,
$$N(\theta) = mg + \frac{m^2gh^2}{J_\mathrm{C}+mh^2}\left(-\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta\right)$$
et
$$T(\theta) = \frac{m^2gh^2}{J_\mathrm{C}+mh^2}\cos\theta(3\sin\theta - 2)$$
A l'instant initial, $\theta = \pi/2$. On a donc $N = mg$ et $T = 0$. Quel que soit μ_s, on aura $|T| < \mu_s|N|$ et il y aura toujours une phase initiale pendant laquelle la tige ne ne glisse pas sur le plan horizontal.

vii. L'angle θ à partir duquel l'extrémité de la tige commence à glisser est tel que

$$|T| = \mu_s |N|$$

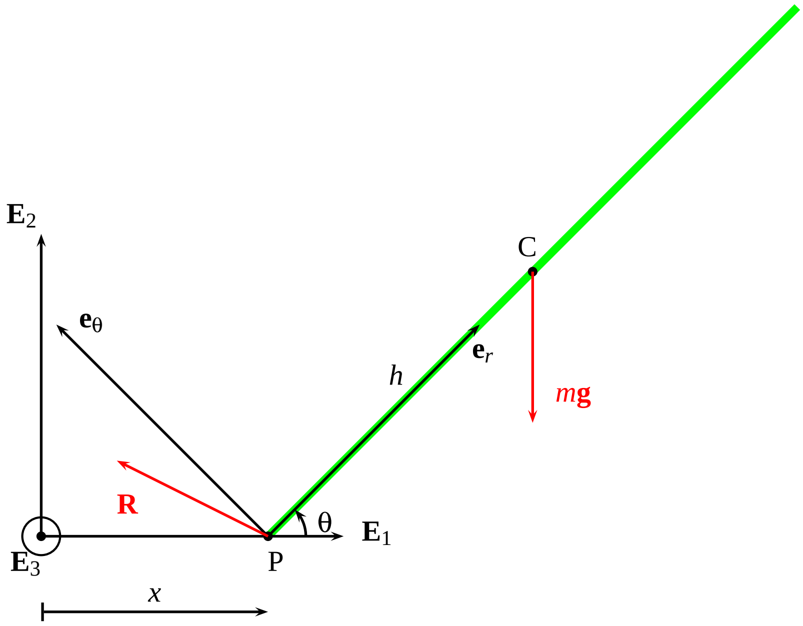
soit

$$\left| \frac{m^2 g h^2}{J_C + m h^2} \cos\theta (3\sin\theta - 2) \right| = \left| \mu_s \left[mg + \frac{m^2 g h^2}{J_C + m h^2} \left(-\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \right) \right] \right|$$

ou encore

$$\left| m h^2 \cos\theta (3\sin\theta - 2) \right| = \left| \mu_s \left[J_C + m h^2 + m h \left(-\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \right) \right] \right|$$

viii. Il ne subsiste qu'une liaison puisque l'extrémité de la tige peut maintenant se déplacer horizontalement sur le plan. Il y a donc 2 ddl et nous pouvons choisir comme inconnues cinématiques l'angle θ ainsi que la coordonnée x (voir dessin) de l'extrémité de la tige.



Les forces en présence sont inchangées. Il y a donc deux inconnues dynamiques, les composantes normale N et tangentielle T de la force de liaison en P.
Quatre équations scalaire indépendantes sont donc nécessaires pour résoudre ce problème.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}}_C = m(\ddot{x}\mathbf{E}_1 + h\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - h\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = m\mathbf{g} + \mathbf{R} = -mg\mathbf{E}_2 + N\mathbf{E}_2 + T\mathbf{E}_1$$

On en tire 2 équations scalaires par projection sur $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$.

$$N = mg + mh\ddot{\theta}\cos\theta - mh\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{1}$$

et

$$T = m\ddot{x} - mh\ddot{\theta}\sin\theta - mh\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{2}$$

Le théorème du moment cinétique en C s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \omega = J_C\dot{\theta}\mathbf{E}_3$$

et où

$$\mathbf{M}_C = -h\mathbf{e}_r \wedge (T\mathbf{E}_1 + N\mathbf{E}_2) = hT\sin\theta\mathbf{E}_3 - hN\cos\theta\mathbf{E}_3$$

En projetant le théorème sur $\mathbf{E}_3$, on obtient la troisième équation scalaire recherchée

$$J_C \ddot{\theta} = hT \sin\theta - hN \cos\theta \tag{3}$$

La quatrième équation ne peut venir des théorèmes généraux. Il s'agit de la loi du frottement

$$T = -\mu |N| \mathrm{sgn}(\dot{x}) \tag{4}$$