Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2018

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en MAJUSCULES) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez le concept de bifurcation.

ii. Dans quel cas l'équation de Newton écrite sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)\mathbf{v}\right] = m(t)\mathbf{g}$$

permet-elle de décrire le mouvement d'un système à masse variable ? Justifiez.

iii. Définissez mathématiquement le tenseur central d'inertie d'un solide indéformable. Énoncez et démontrer la relation entre le tenseur central d'inertie d'un solide indéformable et son énergie cinétique rapportée à un système d'axes placés au centre d'inertie et constamment parallèles à des axes inertiaux (repère de Koenig).

Question II

On considère le mouvement d'un point matériel P de masse m soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale attractive

$$\mathbf{F} = -\mu m \frac{\mathbf{r}}{r^5}$$

où μ désigne une constante strictement positive, $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$.

À l'instant initial, le point matériel est situé à une distance r_0 de O et est animé d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ (non nulle) perpendiculaire au vecteur **OP**.

i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P.

ii. Montrez que le mouvement du point matériel est plan.

iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires du mouvement ainsi que leur interprétation physique.

iv. Discutez la nature du mouvement sur un diagramme de potentiel en fonction des paramètres du problème.

Tournez la page.

Question III

On étudie le mouvement plan d'un disque non homogène de rayon a présentant une symétrie de révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement passant par son centre d'inertie situé au centre géométrique du disque. Le solide a une masse m et roule sans glisser selon la droite de plus grande pente d'un plan incliné présentant un angle α avec l'horizontale.

On note J_C le moment central d'inertie du solide par rapport à son axe de symétrie de révolution.

À l'instant initial, le solide est lâché sans vitesse.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du solide. Justifiez.
ii. Écrivez la relation de roulement sans glissement du solide sur le plan incliné.
iii. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur le solide en précisant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
iv. Écrivez l'expression vectorielle du théorème de la quantité de mouvement en explicitant les résultantes cinématique et dynamique.
v. Écrivez l'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux en explicitant les résultantes cinématique et dynamique.
vi. Écrivez le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertial en explicitant les résultantes cinématique et dynamique.
vii. Montrez que les équations écrites en iv., v. et vi. ne sont pas indépendantes.
viii. À partir des équations écrites plus haut, déduisez une intégrale première scalaire et donnez-en la signification physique.
ix. Déterminez la loi du mouvement du solide.
x. Montrez que l'hypothèse du roulement sans glissement n'est valable que si l'inclinaison du plan incliné satisfait à une relation du type

$$\operatorname{tg}\alpha \leq f\left(\mu, \frac{J_C}{ma^2}\right)$$

où μ désigne le coefficient de frottement (statique) du solide sur le plan et où f est une fonction à déterminer.
xi. Expliquez, sans calcul, pourquoi la valeur du J_C d'un disque homogène ($= ma^2/2$) est inférieure à celle d'un cerceau ($= ma^2$) si les masses et les rayons sont égaux.
xii. Si on lâche en même temps un disque homogène et un cerceau du sommet du plan incliné, lequel arrivera le premier en bas de la pente ? Lequel peut rouler sans glisser sur le plan incliné d'angle α le plus grand ? Le rayon et la masse des solides ont-ils une influence ? Justifiez.

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} = -\mu m \frac{\mathbf{s}}{r^5} = -\mu m r^{-4}\mathbf{e}_r$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r\,\mathbf{e}_r$ est le vecteur position de P par rapport au centre de force O. En simplifiant par la masse m, on obtient

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\mu r^{-4}\mathbf{e}_r$$

ii. Multipliant cette équation vectoriellement par $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r$, on obtient

$$\mathbf{s}\wedge\ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

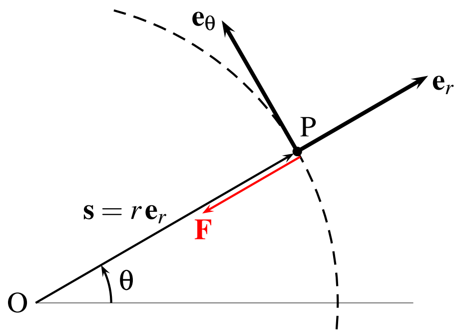
soit

$$\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h} = \mathbf{s}_0\wedge\mathbf{v}_0$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan de normale $\mathbf{h}$ formé par le vecteur position initial $\mathbf{s}_0$ et la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ puisque, à tout instant,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}}) = 0$$

iii. Le mouvement étant plan, on peut le décrire en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.



L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = -\mu r^{-4}\mathbf{e}_r$$

Projetant cette équation dans les directions radiale et tangentielle, on obtient

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu r^{-4} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

On en tire directement une première intégrale première qui exprime la conservation du moment cinétique

$$r^2\dot{\theta} = h$$

Les conditions initiales

$$\mathbf{s}_0 = r_0\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = v_0\,\mathbf{e}_\theta$$

soit

$$\dot{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

permettent de déterminer la constante. On a

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0 v_0 \tag{2}$$

Éliminant $\dot{\theta}$ de (1) en utilisant (2), on obtient

$$\ddot{r} - r_0^2 v_0^2\, r^{-3} + \mu r^{-4} = 0$$

et, après intégration temporelle,

$$\dot{r}^2 + r_0^2 v_0^2\, r^{-2} - \frac{2\mu}{3} r^{-3} = C = v_0^2 - \frac{2\mu}{3} r_0^{-3} \tag{3}$$

où la constante a été déterminée en considérant les conditions initiales. Cette seconde intégrale première exprime la conservation de l'énergie de la particule.

iv. Le mouvement de la particule peut être étudié sur un diagramme de potentiel en se basant sur l'intégrale première (3) écrite sous la forme

$$\dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) = C = v_0^2 - \frac{2\mu}{3} r_0^{-3}$$

où

$$\mathcal{V}(r) = r_0^2 v_0^2\, r^{-2} - \frac{2\mu}{3} r^{-3} = \frac{3r_0^2 v_0^2 r - 2\mu}{3r^3}$$

dont la dérivée

$$\mathcal{V}'(r) = -2r_0^2 v_0^2\, r^{-3} + 2\mu r^{-4} = 2\left(\frac{-r_0^2 v_0^2 r + \mu}{r^4}\right)$$

s'annule en

$$\tilde{r} = \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2}$$

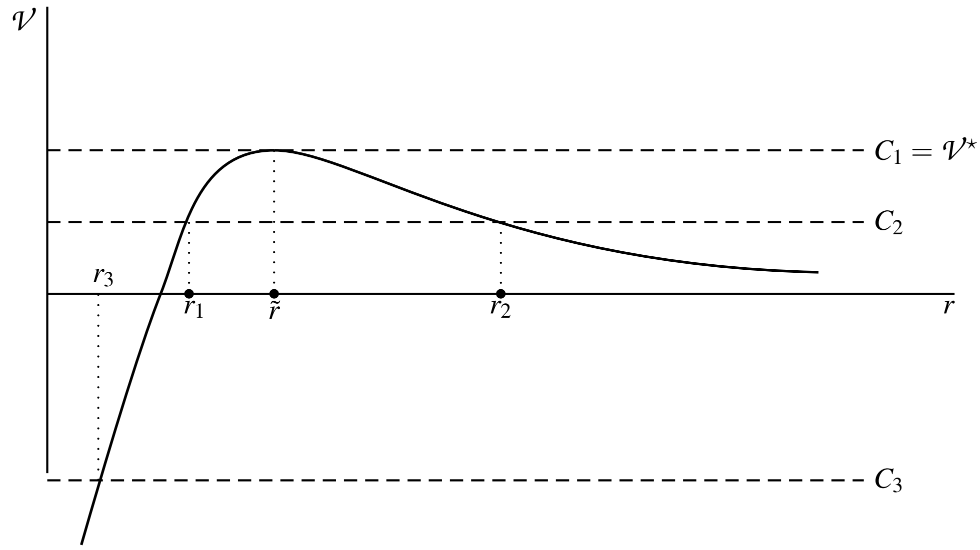
On désigne par $\mathcal{V}^\star$ la valeur de $\mathcal{V}$ en ce point, *i.e.*

$$\mathcal{V}^\star = \mathcal{V}\left(\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2}\right) = \frac{r_0^6 v_0^6}{3\mu^2}$$

On calcule aussi

$$\lim_{r \to 0^+} \mathcal{V}(r) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \to +\infty} \mathcal{V}(r) = 0^+$$

ce qui permet de tracer le diagramme de potentiel suivant

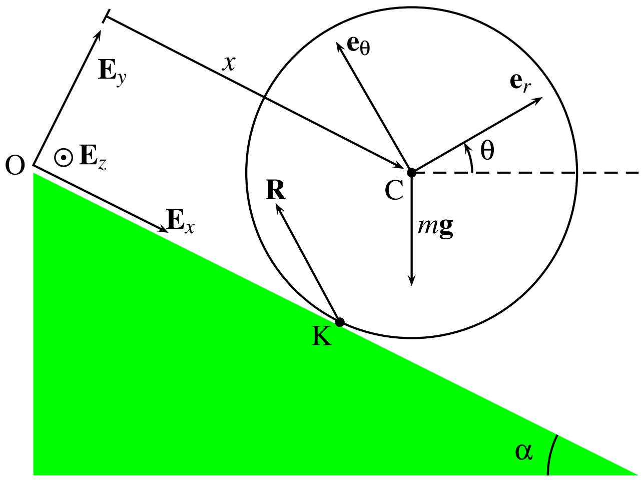


La condition initiale $\dot{r}_0 = 0$ nous apprend que la particule se trouve initialement en un point de réflexion du diagramme de potentiel.

Trois cas peuvent se présenter suivant les valeurs prises par la constante C, c'est-à-dire par les conditions initiales r_0 et v_0.

- Si $r_0 = \tilde{r}$, ce qui correspond au cas $C = C_1 = \mathcal{V}^\star$ sur le diagramme de potentiel, le point décrit une trajectoire circulaire de rayon $\tilde{r}$ autour du centre de force. Cette trajectoire est instable. L'intégrale première (2) nous apprend que cette trajectoire est parcourue à la vitesse angulaire constante $v_0/\tilde{r}$.
- Si les conditions initiales sont telles que $0 < C < \mathcal{V}^\star$, par exemple si $C = C_2$, le point matériel a soit un mouvement borné à l'intérieur du cercle de rayon r_1 s'il se trouve initialement en r_1, soit un mouvement non borné à l'extérieur du cercle de rayon r_2 s'il se trouve initialement en r_2.
- Si $C \leq 0$, par exemple si $C = C_3$, le point matériel, initialement situé en r_3 est ensuite animé d'un mouvement borné à l'intérieur du cercle de rayon r_3.

Question III



i. Un solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Le mouvement sur le plan incliné et la condition de roulement sans glissement imposent deux liaisons. Le solide a donc un seul degré de liberté.

ii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan incliné se traduit par l'égalité de leurs vitesses au niveau du point de contact K, soit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \mathbf{0}$$

En prenant en compte le vecteur de Poisson $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$ du solide (voir figure), la vitesse du point du solide en contact en K avec le plan horizontal est

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{CK} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (-a\mathbf{E}_y) = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

iii. Les forces extérieures agissant sur le solide sont

- $m\mathbf{g}$: la force de pesanteur, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;

- $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$: la force de liaison exercée par le plan incliné sur le solide au point de contact K.

iv. Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point O donne

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = \mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{N}_\mathrm{O} = m\,\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = m\dot{x}\,\mathbf{E}_x$$

Dès lors, le théorème s'écrit

$$m\ddot{x}\,\mathbf{E}_x = m\mathbf{g} + T\mathbf{E}_x + N\mathbf{E}_y \tag{5}$$

v. Appliquant au solide étudié le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C, il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

où

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = \mathbf{CC} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CK} \wedge \mathbf{R} = -a\mathbf{E}_y \wedge (T\mathbf{E}_x + N\mathbf{E}_y) = aT\mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = J_\mathrm{C}\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

soit

$$J_\mathrm{C}\ddot{\theta} = aT \tag{6}$$

vi. Le théorème de l'énergie cinétique rapporté à des axes inertiaux centrés en O, s'écrit

$$\frac{dT_\mathrm{O}}{dt} = \mathcal{P}_\mathrm{O} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}$$

vu la condition de roulement sans glissement et où

$$T_\mathrm{O} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}\|^2 + T_\mathrm{C}$$

avec

$$\|\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}\|^2 = \dot{x}^2$$

et

$$T_\mathrm{C} = \frac{1}{2}\,\omega \cdot \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = \frac{1}{2}\,\dot{\theta}\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \dot{\theta}\mathbf{E}_z = \frac{1}{2}J_\mathrm{C}\dot{\theta}^2$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m\dot{x}^2 + J_\mathrm{C}\dot{\theta}^2) = m\dot{x}\,\ddot{x} + J_\mathrm{C}\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = mg\dot{x}\sin\alpha \tag{7}$$

vii. Multipliant scalairement (5) par $\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = \dot{x}\,\mathbf{E}_x$ et lui ajoutant le produit de (6) par $\dot{\theta}$ on obtient, en tenant compte de la condition de roulement sans glissement,

$$m\dot{x}\,\ddot{x} + J_\mathrm{C}\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = (\dot{x} + a\dot{\theta})T + mg\dot{x}\sin\alpha = mg\dot{x}\sin\alpha$$

qui n'est autre que (7). Les équations ne sont donc pas indépendantes.

viii. Éliminant la variable θ de (7) au moyen de la condition de roulement sans glissement, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[m\dot{x}^2\left(1 + \frac{J_\mathrm{C}}{ma^2}\right)\right] = mg\dot{x}\sin\alpha$$

On en déduit l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}\left(1 + \frac{J_\mathrm{C}}{ma^2}\right) = mgx\sin\alpha + C$$

où la constante C peut être déterminée en utilisant les conditions initiales $\dot{x} = 0$ et $x = 0$ (en plaçant les axes à la position initiale du solide).

L'intégrale première de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}\left(1+\frac{J_C}{ma^2}\right) = mgx\sin\alpha \tag{8}$$

ix. Dérivant l'intégrale première (8) par rapport au temps, on obtient

$$\ddot{x}\left(1+\frac{J_C}{ma^2}\right) = g\sin\alpha \tag{9}$$

soit, en intégrant deux fois par rapport au temps et en tenant compte des conditions initiales,

$$x(t) = g\sin\alpha\left(\frac{ma^2}{ma^2+J_C}\right)\frac{t^2}{2}$$

x. Le roulement sans glissement est possible tant que $|T| \leq \mu\,|N|$.

À partir de (5), on trouve $N = mg\cos\alpha$. De même, (6) donne

$$T = \frac{J_C}{a}\,\ddot{\theta} = -\frac{J_C}{a^2}\,\ddot{x} = -\frac{J_C}{a^2}\,\frac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{J_C}{ma^2}} = -\frac{mg\sin\alpha}{\dfrac{ma^2}{J_C}+1}$$

Le roulement sans glissement est donc possible si la pente du plan inclinée est telle que

$$\frac{mg\sin\alpha}{\dfrac{ma^2}{J_C}+1} \leq \mu mg\cos\alpha$$

soit

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leq \mu\left(1+\frac{ma^2}{J_C}\right) \tag{10}$$

xi. J_C est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par C et perpendiculaire au plan du solide. Il mesure l'inertie du solide pour la rotation autour de C. Sa valeur est d'autant plus grande que la masse du solide est éloignée du centre d'inertie.

Le moment d'inertie est maximum pour un cerceau car toute la masse est alors distribuée à la distance a maximale du centre d'inertie.

xii. Le résultat obtenu en (9) montre que l'accélération du centre d'inertie est maximale pour un solide présentant le plus faible rapport $J_C/(ma^2)$. Le disque homogène arrivera donc plus rapidement en bas de la pente puisque ce rapport est alors égal à $1/2$ alors qu'il est égal à 1 pour un cerceau.

Par ailleurs, la condition d'existence du roulement sans glissement écrite en (10) montre que la pente permise diminue avec le rapport $J_C/(ma^2)$. Le disque homogène peut donc rouler sans glisser sur un plan plus incliné que le cerceau.

La loi du mouvement et la condition d'existence du roulement sans glissement ne dépendent que du rapport $J_C/(ma^2)$, de μ et de g. Elles ne dépendent pas séparément de la masse ni du rayon du solide. Ceux-ci n'ont donc pas d'influence.