LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2017

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

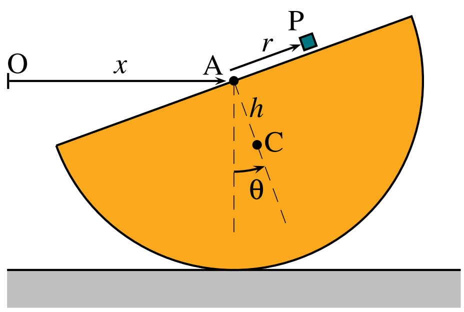
i. On considère l'ensemble des forces de cohésion agissant au sein d'un solide rigide.
   (a) Calculez la résultante de ces forces.
   (b) Calculez le moment résultant de ces forces.
   (c) Calculez la puissance résultante de ces forces.
   (d) Que pouvez-vous en déduire concernant l'intervention de ces forces dans les différents théorèmes généraux écrits pour un solide rigide dans un repère inertial ?

ii. Définissez brièvement mais aussi complètement que possible les termes suivants.
   (a) Orbite de transfert de Hohmann.
   (b) Mouvement avec rebroussement d'une toupie.
   (c) Équilibrage dynamique d'un système en rotation.

Question II

On considère le mouvement plan d'un système constitué d'un demi-disque de rayon a et de masse M et d'un corps de masse m assimilé à un point matériel P. Le demi-disque se déplace sur un plan horizontal. Le point matériel glisse sans frottement sur la face plane du demi-disque.

On note h la distance entre le centre A du disque et le centre d'inertie C du demi-disque et J_C le moment central d'inertie du demi-disque par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement.



i. Exprimez la vitesse absolue du point matériel P en fonction des coordonnées généralisées x, r et θ représentant respectivement la position du centre du disque A par rapport à un point fixe O, la position du point P par rapport au centre du disque et l'inclinaison de l'axe de symétrie du disque par rapport à la verticale (voir figure).

ii. Exprimez la vitesse relative du point matériel par rapport au demi-disque en fonction des coordonnées généralisées.

iii. Dans le cas où le demi-disque roule sans glisser sur le plan horizontal, les équations différentielles décrivant le mouvement du système sont données par

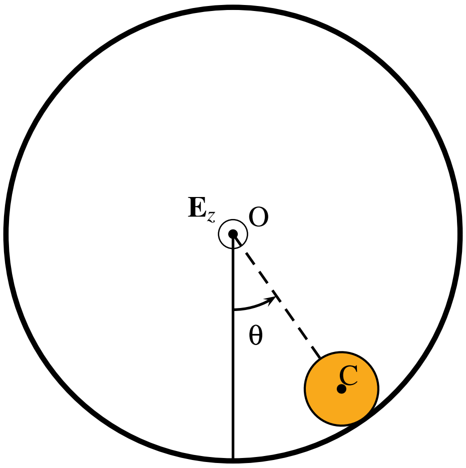
$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)-ma\ddot{\theta}\cos\theta+mg\sin\theta=0 \\ \left[M(a^2+h^2-2ah\cos\theta)+m(a^2+r^2+2mar\sin\theta)+J_C\right]\ddot{\theta}+\left[mar\cos\theta+Mah\sin\theta\right]\dot{\theta}^2 \\ \qquad -ma\ddot{r}\cos\theta+2mr\dot{r}\dot{\theta}(r+a\sin\theta)+Mgh\sin\theta+mgr\cos\theta=0 \end{cases}$$

Déterminez dans ce cas la(les) configuration(s) d'équilibre du système et sa(leur) stabilité.

Question III

On étudie le roulement sans glissement d'un disque homogène de rayon a et de masse m à l'intérieur d'un cylindre creux de rayon $b > a$. Le cylindre est fixe. Le mouvement a lieu dans un plan vertical. Les axes de symétrie de révolution du disque et du cylindre sont horizontaux et parallèles l'un à l'autre.

À l'instant initial, le disque est situé au point le plus bas du cylindre et roule sans glisser sur le cylindre alors que son centre d'inertie est animé d'une vitesse $\mathbf{w}$ horizontale et perpendiculaire à l'axe du cylindre.



Le tenseur central d'inertie du disque peut s'écrire sous la forme $\mathbf{J}_\mathrm{C} = \frac{1}{4}ma^2(\mathbf{I} + \mathbf{E}_z\mathbf{E}_z)$ où $\mathbf{E}_z$ désigne l'axe de symétrie de révolution.

On note μ le coefficient de frottement entre le cylindre et le disque.

On repère la position du disque dans le cylindre par l'angle θ mesuré à partir de la verticale inférieure (voir figure).

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du disque.
ii. Relevez toutes les forces agissant sur le disque en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
iii. Déterminez la relation de roulement sans glissement du disque sur le cylindre.
iv. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement.
v. Écrivez* le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du disque et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux.
vi. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertial.
vii. Déterminez une intégrale première scalaire du mouvement et précisez son interprétation physique éventuelle.
viii. Déterminez (sans la résoudre) une équation pour l'angle $\theta_\star$ pour lequel le disque cesse de rouler sans glisser.

* Explicitez chacune des résultantes cinématiques et dynamiques intervenant dans les théorèmes.

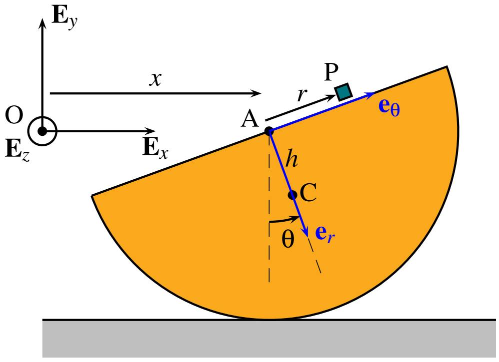
Question II

i. Introduisant les axes absolus $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, $\mathbf{E}_z$ et les axes liés au demi-disque $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ (voir figure), on a

$$\mathbf{s}_\mathrm{P} = x\mathbf{E}_x + r\mathbf{e}_\theta$$

et la vitesse absolue s'écrit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{P} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{r}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}\mathbf{e}_r$$



ii. La vitesse relative de P par rapport au demi-disque s'écrit

$$\frac{\delta \mathbf{s}_\mathrm{P}}{\delta t} = \dot{r}\mathbf{e}_\theta$$

iii. À l'équilibre ($\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$), les équations données deviennent

$$mg\sin\theta = 0$$

$$Mgh\sin\theta + mgr\cos\theta = 0$$

La configuration d'équilibre est donc obtenue pour $\theta = 0$ et $r = 0$.

Les équations décrivant l'évolution de petites perturbations de la configuration d'équilibre, $\theta = \eta$ et $r = \varepsilon$, s'écrivent

$$m(\ddot{\varepsilon} - \varepsilon\dot{\eta}^2) - ma\ddot{\eta}\cos\eta + mg\sin\eta = 0$$

$$\begin{aligned}\left[M(a^2 + h^2 - 2ah\cos\eta) + m(a^2 + \varepsilon^2 + 2ma\varepsilon\sin\eta) + J_\mathrm{C}\right]\ddot{\eta} + \left[ma\varepsilon\cos\eta + Mah\sin\eta\right]\dot{\eta}^2 \\ -ma\ddot{\varepsilon}\cos\eta + 2m\dot{\varepsilon}\dot{\eta}(\varepsilon + a\sin\eta) + Mgh\sin\eta + mg\varepsilon\cos\eta = 0\end{aligned}$$

En linéarisant ces équations, on obtient

$$m\ddot{\varepsilon} - ma\ddot{\eta} + mg\eta = 0$$

$$\left[M(a-h)^2 + J_C + ma^2\right]\ddot{\eta} - ma\ddot{\varepsilon} + Mgh\eta + mg\varepsilon = 0$$

De la première équation, on tire

$$\ddot{\varepsilon} = a\ddot{\eta} - g\eta$$

Dérivant deux fois la seconde équation et y injectant cette expression, il vient

$$\left[M(a-h)^2 + J_C + ma^2\right]\eta^{(4)} - ma\left(a\eta^{(4)} - g\ddot{\eta}\right) + Mgh\ddot{\eta} + mg(a\ddot{\eta} - g\eta) = 0$$

soit

$$\left[M(a-h)^2 + J_C\right]\eta^{(4)} + g(2ma + Mh)\ddot{\eta} - mg^2\eta = 0$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 4 est donné par

$$L(z) = \left[M(a-h)^2 + J_C\right]z^4 + g(2ma + Mh)z^2 - mg^2$$

Le discriminant

$$\rho = \Big[g(2ma+Mh)\Big]^2 + 4mg^2\Big[M(a-h)^2+J_C\Big]$$

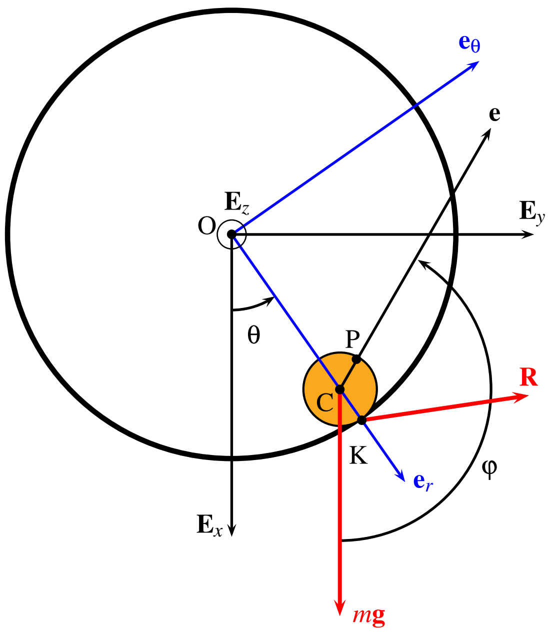
de cette équation bicarrée est positif. Dès lors, les valeurs de z^2 sont réelles.
La somme et le produit de ces z^2 valent

$$\Sigma = \frac{-g\Big(2ma+Mh\Big)}{\Big[M(a-h)^2+J_C\Big]} \quad \text{et} \quad \Pi = \frac{-mg^2}{\Big[M(a-h)^2+J_C\Big]}$$

et sont donc négatifs.
On en déduit que l'une des valeurs de z^2 est négative et l'autre positive. À la valeur positive, on peut associer deux zéros réels $\pm\alpha$ de $L(z)$ dont l'un est positif. Dès lors, l'équilibre est instable.

Question III

i. Le disque est en mouvement plan et possède donc au maximum trois degrés de liberté.
Le contact entre le disque et le cylindre ainsi que la condition de roulement sans glissement introduisent deux contraintes cinématiques. Dès lors, le disque possède un seul degré de liberté.



ii. Les forces agissant sur le disque sont
- la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force extérieure conservative appliquée au centre d'inertie du disque et dirigée verticalement vers le bas ;
- la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$ appliquée en K et de direction inconnue (voir figure).

iii. Le roulement sans glissement se traduit par la condition

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{disque} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{cylindre}$$

où $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{disque}$ désigne la vitesse du point matériel du disque qui est en contact en K avec le cylindre et où $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{cylindre}$ est la vitesse du point matériel du cylindre correspondant. Puisque le cylindre est immobile, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{cylindre} = \mathbf{0}$$

Le vecteur position d'un point matériel quelconque du pourtour du disque est donné par

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}} = (b-a)\mathbf{e}_r + a\mathbf{e}$$

et sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = (b-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\omega \wedge \mathbf{e}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$ est le vecteur de Poisson du disque et où φ décrit la rotation du disque autour de son centre d'inertie.
Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec le cylindre en K, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_K = (b-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge (a\mathbf{e}_r) = (b-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_\theta$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement se traduit par la relation

$$(b-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$$

iv. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_O = m\ddot{\mathbf{s}}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où $\mathbf{s}_C = (b-a)\mathbf{e}_r$ soit

$$m(b-a)\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - m(b-a)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = mg\cos\theta\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\mathbf{e}_\theta + N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$$

v. L'application du théorème du moment cinétique dans un système d'axes centrés au centre d'inertie et parallèles à des axes inertiaux conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C \qquad \text{où} \qquad \mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}ma^2(\mathbf{I} + \mathbf{E}_z\mathbf{E}_z)\cdot\dot{\varphi}\mathbf{E}_z = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\mathbf{E}_z$$

Dès lors,

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\mathbf{E}_z = a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R}$$

soit

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} = aT$$

vi. Le théorème de l'énergie cinétique en O s'écrit

$$\dot{T}_O = P_O = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_K + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C = -\frac{dV_{mg}}{dt}$$

où on a tenu compte de la condition de roulement sans glissement et du caractère conservatif de la force de pesanteur. On a

$$V_{mg} = -mg(b-a)\cos\theta$$

et

$$T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{J}_C\cdot\dot{\varphi}\mathbf{E}_z = \frac{m(b-a)^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{4}$$

soit, en utilisant la condition de roulement sans glissement,

$$T_O = \frac{3m(b-a)^2\dot{\theta}^2}{4}$$

Introduisant ces valeurs dans le théorème, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3m(b-a)^2\dot{\theta}^2}{4} - mg(b-a)\cos\theta\right] = 0$$

vii. Le théorème de l'énergie cinétique donne directement l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{3m(b-a)^2\dot{\theta}^2}{4} - mg(b-a)\cos\theta = \text{constante}$$

où les conditions initiales $\theta = 0$ et $(b-a)\dot{\theta} = w$ permettent de déterminer la valeur de la constante, soit

$$\text{constante} = \frac{3}{4}mw^2 - mg(b-a)$$

L'intégrale première s'écrit finalement

$$\frac{3m(b-a)^2\dot{\theta}^2}{4} - mg(b-a)\cos\theta = \frac{3}{4}mw^2 - mg(b-a)$$

soit

$$\frac{3}{4}(b-a)\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = \frac{3w^2}{4(b-a)} - g$$

viii. Les projections du théorème de la quantité de mouvement sur $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ permettent d'écrire

$$\begin{cases} N = -m(b-a)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \\ T = m(b-a)\ddot{\theta} + mg\sin\theta \end{cases}$$

En utilisant l'expression de $\dot{\theta}^2$ donnée par l'intégrale première de conservation de l'énergie,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(b-a)}(\cos\theta - 1) + \frac{w^2}{(b-a)^2}$$

et celle de $\ddot{\theta}$ obtenue en dérivant ce résultat par rapport au temps,

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(b-a)}\sin\theta$$

on obtient

$$\begin{cases} N = -\dfrac{7mg}{3}\cos\theta + \dfrac{4mg}{3} - \dfrac{mw^2}{b-a} \\ T = \dfrac{mg}{3}\sin\theta \end{cases}$$

Le roulement sans glissement persiste tant que

$$|T| \leq \mu\,|N|$$

soit tant que

$$\frac{mg}{3}|\sin\theta| \leq \mu\left|-\frac{7mg}{3}\cos\theta + \frac{4mg}{3} - \frac{mw^2}{b-a}\right| \qquad (\dagger)$$

Remarquons que N est initialement négatif, en accord avec la nature unilatérale de la liaison entre le cylindre et le disque, et reste négatif tant que le disque roule sans glisser sur le cylindre. Dès lors, la condition (†) peut s'écrire

$$|\sin\theta| \leq \mu\left(7\cos\theta - 4 + \frac{3w^2}{g(b-a)}\right)$$

Cette condition est vérifiée initialement, *i.e.* pour $\theta = 0$. Le disque cesse de rouler sans glisser lorsque $|\theta| > \theta_\star$ où l'angle $\theta_\star$, s'il existe, correspond à $|T| = \mu|N|$ et peut est obtenu en résolvant l'équation

$$\sin\theta_\star = \mu\left(7\cos\theta_\star - 4 + \frac{3w^2}{g(b-a)}\right)$$