Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2016

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe **e** en mouvement autour de son sommet O fixe.

i. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer l'orientation de la toupie dans l'espace et exprimez le vecteur de Poisson de la toupie en fonction de ceux-ci.
ii. Exprimez et justifiez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie.
iii. Établissez l'expression de l'énergie cinétique absolue de la toupie en fonction des angles d'Euler.

Question II

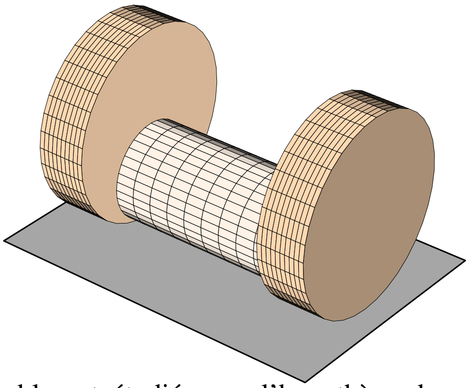
Une fusée, partant du repos, s'élève verticalement dans le champ de pesanteur uniforme **g**. La propulsion est assurée par l'éjection rétrograde (vers l'arrière de la fusée, vers le bas) des gaz de combustion à la vitesse relative constante w. La masse totale de la fusée est la somme de sa masse propre m_p (comprenant la charge utile) et de la masse du combustible m_c.

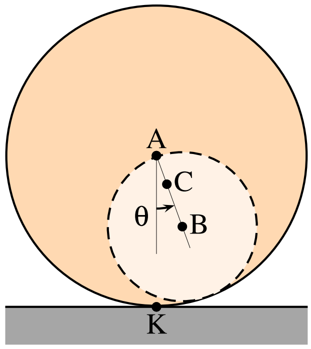
Montrez que la vitesse atteinte par la fusée à la fin de la phase de combustion est indépendante de la forme particulière de la loi d'éjection $m(t)$ de la masse en fonction du temps mais dépend de la durée totale t_c de la combustion, de g, de w et du rapport m_c/m_p.

Tournez la page.

Question III

On considère le mouvement d'un élément d'arbre à cames tel que représenté ci-dessous reposant sur un plan horizontal rugueux. L'élément est constitué de deux cylindres homogènes coaxiaux de rayon a et de longueur $\ell/4$ reliés par un cylindre homogène de rayon $a/2$ et de longueur ℓ possédant une génératrice commune avec les deux premiers cylindres. La masse de l'ensemble est m.





L'ensemble est étudié sous l'hypothèse du mouvement plan en assimilant l'élément à un solide cylindrique de centre A et de rayon a dont le centre d'inertie C est situé à une distance $d = \|\mathbf{AC}\| < a/2$ de A. On note J_C le moment central d'inertie du solide pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement et B la trace dans le plan du mouvement de l'axe de symétrie du cylindre de rayon $a/2$.

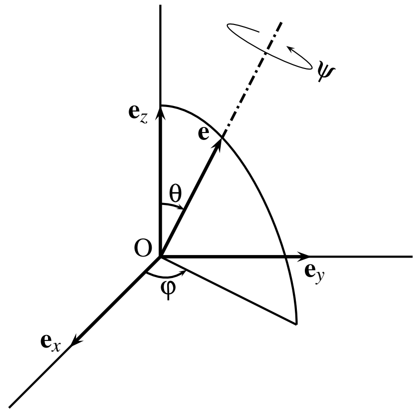
On note μ le coefficient de frottement entre le solide et le plan horizontal. On repère l'orientation du solide par l'angle θ entre la verticale et **AC**.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du solide en supposant que celui-ci roule sans glisser sur le plan.
ii. Relevez toutes les forces agissant sur le solide en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
iii. Déterminez la relation de roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal.
iv. Exprimez la vitesse et l'accélération absolues du centre d'inertie C du solide.
v. Écrivez† le théorème de la quantité de mouvement.
vi. Écrivez† le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux.
vii. Écrivez† le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertial.
viii. Déterminez une intégrale première scalaire du mouvement et précisez son interprétation physique éventuelle.
ix. Déterminez la période des petites oscillations du solide autour de sa position d'équilibre $\theta = 0$.
x. Sous l'hypothèse de petites oscillations, déterminez l'amplitude limite des petites oscillations du solide autour de $\theta = 0$ compatibles avec l'hypothèse de roulement sans glissement.
xi. En supposant que les cylindres constituant le solide sont homogènes et constitués du même matériau, exprimez d et J_C en fonction de la masse totale m du solide et du rayon a des plus grands cylindres.
   Le moment central d'inertie pour la rotation d'un cylindre de masse M et de rayon R autour de son axe de symétrie de révolution est égal à $MR^2/2$.

† Explicitez chacune des résultantes cinématiques et dynamiques intervenant dans les théorèmes.

Question I

i. Soit **e** l'axe de symétrie de révolution de la toupie et les vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ formant un repère d'orientation fixe. L'orientation de la toupie dans l'espace peut alors être décrite par la donnée des angles d'Euler suivants :



(a) l'angle de *nutation* θ mesure l'inclinaison de l'axe de référence **e** par rapport à la verticale $\mathbf{e}_z$;

(b) l'angle de *précession* φ mesure l'angle entre le plan formé par **e** et $\mathbf{e}_z$ et le plan formé par $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$;

(c) l'angle de *rotation propre* ψ mesure la rotation de la toupie autour de l'axe **e**.

Le vecteur de Poisson peut être exprimé en fonction des angles d'Euler sous la forme

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \dot{\theta}\frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}\|} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \frac{\dot{\theta}}{\sin\theta}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e})$$

ii. Dans les axes principaux d'inertie de la toupie au point O, le tenseur d'inertie s'écrit

$$\mathbf{J}_O = J_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + J_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{e}\mathbf{e}$$

où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont deux axes perpendiculaires à l'axe de symétrie **e**.
Vu la symétrie de révolution, le solide présente le même moment d'inertie pour la rotation autour de tout axe perpendiculaire à **e** et passant par le point O. Dès lors, $J_1 = J_2 = A$ et

$$\mathbf{J}_O = A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{e}\mathbf{e} = A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}$$

où $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}\mathbf{e}$ est le tenseur identité.

iii. La toupie étant en rotation autour de son sommet O fixe, son énergie cinétique peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned}
T_O &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot [A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}] \cdot \boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{A}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}(\Gamma - A)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})^2 \\
&= \frac{A}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}(\Gamma - A)(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2
\end{aligned}$$

Question II

L'équation différentielle du mouvement de la fusée s'écrit

$$m(t)\ddot{\mathbf{s}} = m(t)\mathbf{g} + \mathbf{P}$$

où **s** est le vecteur position du centre d'inertie de la fusée par rapport à un repère absolu et où la poussée **P** vaut

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w} = \frac{dm}{dt}(-w\mathbf{E}_z) = -\frac{dm}{dt}w\mathbf{E}_z$$

La fusée partant du repos et étant uniquement soumise à des forces verticales, le mouvement sera rectiligne selon l'axe vertical $\mathbf{E}_z$. Projetant l'équation différentielle du mouvement sur $\mathbf{E}_z$, on obtient

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g - \frac{dm}{dt}w$$

ou encore

$$\ddot{z} = -g - \frac{w}{m}\frac{dm}{dt}$$

Pour obtenir l'expression de la vitesse $\dot{z}_c$ à la fin de la phase de combustion, il suffit d'intégrer cette équation entre l'instant initial et l'instant t_c correspondant à la fin de la phase de combustion, moment où tout le combustible est épuisé et où la masse totale vaut m_p.

En $t = 0$, $\dot{z} = 0$ et $m = m_p + m_c$.

En $t = t_c$, $\dot{z} = \dot{z}_c$ et $m = m_p$.

On a

$$\int_0^{t_c} \ddot{z}\,dt = -\int_0^{t_c} g\,dt - \int_0^{t_c} \frac{w}{m}\frac{dm}{dt}dt$$

soit

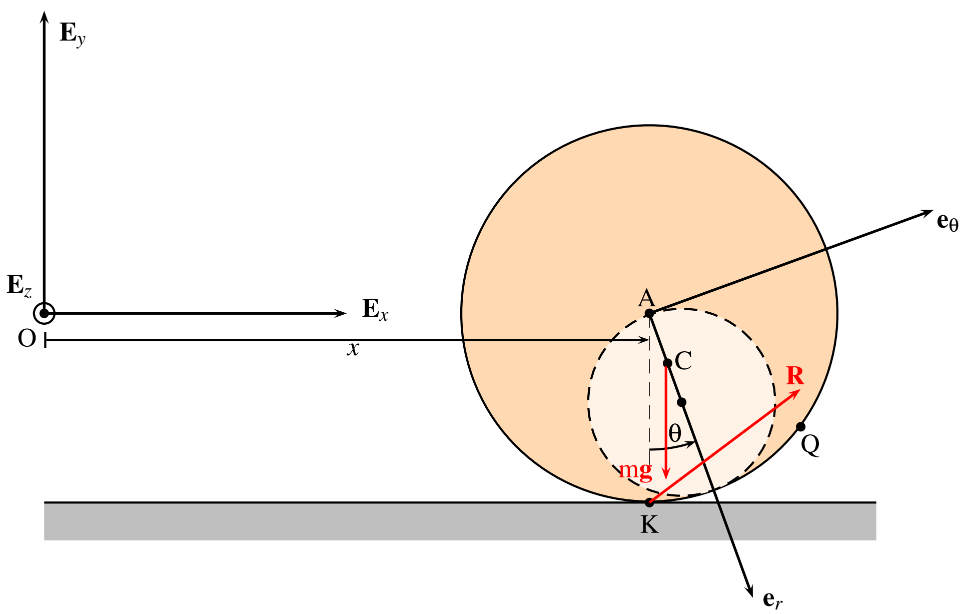
$$\dot{z}_c = -gt_c - \int_{m_p+m_c}^{m_p} w\frac{dm}{m}$$

et donc

$$\dot{z}_c = -gt_c - w\ln\left(\frac{m_p}{m_p+m_c}\right) = -gt_c + w\ln\left(1+\frac{m_c}{m_p}\right)$$

La vitesse à la fin de la phase de combustion dépend de g, t_c, w et m_c/m_p mais pas de la forme particulière de $m(t)$.

Question III



i. Le solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Il est soumis à deux liaisons, son contact avec le plan et le roulement sans glissement. Il ne lui reste donc qu'un seul degré de liberté.

ii. Les forces agissant sur le solide sont

- $m\mathbf{g}$: la force de pesanteur, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$: la force de liaison exercée par le plan horizontal sur le solide au point de contact K (voir dessin).

iii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan se traduit par l'égalité de leurs vitesses au niveau du point de contact K, soit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \mathbf{0}$$

Considérons un point Q situé sur le pourtour du solide (voir dessin). On peut écrire

$$\mathbf{s}_Q = x\mathbf{E}_x + \mathbf{AQ}$$

et, en prenant en compte le vecteur de Poisson $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$ du solide,

$$\dot{\mathbf{s}}_Q = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{AQ}$$

Particularisant cette expression à l'instant où le point Q est en contact avec le plan horizontal, on obtient

$$\dot{\mathbf{s}}_K = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{AK} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (-a\mathbf{E}_y) = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{1}$$

iv. On a

$$\mathbf{s}_C = x\mathbf{E}_x + d\mathbf{e}_r$$

et donc

$$\dot{\mathbf{s}}_C = \dot{x}\mathbf{E}_x + d\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\ddot{\mathbf{s}}_C = \ddot{x}\mathbf{E}_x + d\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - d\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r$$

v. Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point O donne

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{N}_O = m\,\dot{\mathbf{s}}_C$$

Dès lors, le théorème s'écrit

$$m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + d\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - d\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x \tag{2}$$

vi. Appliquant au solide étudié le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C, il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_C = \mathbf{CC} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CK} \wedge \mathbf{R} &= (-d\mathbf{e}_r - a\mathbf{E}_y) \wedge (N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x) \\ &= -dN(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_y) - dT(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_x) - aT(\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{E}_x) \\ &= -dN\sin\theta\mathbf{E}_z - dT\cos\theta\mathbf{E}_z + aT\mathbf{E}_z\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_C\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

soit

$$\frac{d}{dt}(J_C\dot{\theta}\mathbf{E}_z) = -dN\sin\theta\mathbf{E}_z - dT\cos\theta\mathbf{E}_z + aT\mathbf{E}_z$$

ou encore, en projetant sur $\mathbf{E}_z$,

$$J_C\ddot{\theta} = -dN\sin\theta - dT\cos\theta + aT$$

vii. Le théorème de l'énergie cinétique pour le solide, rapporté à des axes inertiaux centrés en O, s'écrit

$$\frac{dT_O}{dt} = \mathcal{P}_O = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_K = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C$$

vu la condition de roulement sans glissement et où

$$T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C$$

avec

$$\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 = \dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

et

$$T_C = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\dot{\theta}\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{J}_C\cdot\dot{\theta}\mathbf{E}_z = \frac{1}{2}\,J_C\dot{\theta}^2$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2\right] = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C = -mgd\dot{\theta}\sin\theta$$

viii. Puisque $m\mathbf{g}$ est une force conservative, on peut écrire

$$m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C = -\frac{dV_{m\mathbf{g}}}{dt}$$

où

$$V_{m\mathbf{g}} = -mgd\cos\theta$$

Après intégration temporelle, on obtient alors l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = E$$

En tenant compte de (1), cette intégrale première peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta + \frac{J_C}{m}\right) - mgd\cos\theta = E \tag{3}$$

ix. En dérivant par rapport au temps (3), on obtient

$$m\ddot{\theta}\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta + \frac{J_C}{m}\right) + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\,(2ad\sin\theta) + mgd\sin\theta = 0$$

La linéarisation de cette équation autour de la position verticale inférieure $\theta = 0$ donne

$$m\ddot{\theta}\left(a^2 + d^2 - 2ad + \frac{J_C}{m}\right) + mgd\theta = 0$$

soit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{4}$$

où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{m(a-d)^2 + J_C}}$$

Il s'agit donc d'un mouvement oscillatoire de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m(a-d)^2 + J_C}{mgd}}$$

x. Sous l'hypothèse de petites oscillations, le terme en $\dot{\theta}^2$ peut être négligé dans (2) et on a, en tenant compte de (1) et de (4),

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -a\ddot{\theta} = a\omega_0^2\theta$$

On a donc

$$m(a\omega_0^2\,\theta\mathbf{E}_x - d\omega_0^2\,\theta\,\mathbf{e}_\theta) = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$$

soit, en projetant selon $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$,

$$T = m(a\omega_0^2\,\theta - d\omega_0^2\theta\cos\theta) \sim m(a-d)\omega_0^2\theta, \qquad (\theta \to 0)$$

et

$$N = mg - md\omega_0^2\theta\sin\theta \sim mg - md\omega_0^2\theta^2 \sim mg, \qquad (\theta \to 0)$$

Le roulement sans glissement est possible si $|T|/|N| \leq \mu$, c'est-à-dire si

$$\frac{m(a-d)\omega_0^2|\theta|}{mg} \leq \mu$$

ou encore si

$$|\theta| \leq \theta_{max} = \frac{\mu g}{(a-d)\omega_0^2}$$

qui constitue donc l'amplitude limite des oscillations du solide compatibles avec l'hypothèse de roulement sans glissement.

xi. • *Détermination de la position du centre d'inertie du solide.*
Le principe de superposition permet d'écrire

$$m\mathbf{c} = m_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2 + m_3\mathbf{c}_3 \tag{5}$$

où les indices 1, 2 et 3 se rapportent respectivement au premier grand cylindre, au petit cylindre et au deuxième grand cylindre et où, notant ρ la masse volumique commune des différents cylindres,

$$m_1 = m_3 = \rho\pi a^2 \frac{\ell}{4} \quad \text{et} \quad m_2 = \rho\pi \frac{a^2}{4}\ell$$

soit

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3}$$

Projetant (5) sur la direction portée par le vecteur **AC**, il vient

$$md = \frac{1}{3}m \times 0 + \frac{1}{3}m \times \frac{a}{2} + \frac{1}{3}m \times 0$$

soit

$$d = \frac{a}{6}$$

• *Détermination du moment d'inertie J_C du solide.*
Par superposition, le moment d'inertie recherché est la somme des moments d'inertie par rapport à C des trois cylindres constituant le solide, soit

$$J_\mathrm{C} = J_\mathrm{C}^{cyl_1} + J_\mathrm{C}^{cyl_2} + J_\mathrm{C}^{cyl_3}$$

On a, pour les différents cylindres par rapport à leur centre d'inertie respectif,

$$J_\mathrm{A}^{cyl_1} = J_\mathrm{A}^{cyl_3} = \frac{m}{3}\frac{a^2}{2} = \frac{ma^2}{6} \quad \text{et} \quad J_\mathrm{B}^{cyl_2} = \frac{m}{3}\frac{a^2/4}{2} = \frac{ma^2}{24}$$

Appliquant le théorème C à chacun des cylindres, on calcule

$$J_\mathrm{C}^{cyl_1} = J_\mathrm{C}^{cyl_3} = \frac{ma^2}{6} + \frac{m}{3}d^2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{m}{3}\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{19}{108}ma^2$$

et

$$J_\mathrm{C}^{cyl_2} = \frac{ma^2}{24} + \frac{m}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{17}{216}ma^2$$

Au total, on a donc finalement

$$J_\mathrm{C} = 2\left(\frac{19}{108}ma^2\right) + \frac{17}{216}ma^2 = \frac{31}{72}ma^2$$