Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2015

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Établissez l'expression de l'énergie cinétique T_C d'un solide indéformable en fonction de son vecteur de Poisson si T_C est rapportée à un système d'axes centrés au centre d'inertie C et constamment parallèles à des axes inertiaux.

Par rapport à quel(s) autre(s) point(s) une relation semblable existe-t-elle entre l'énergie cinétique et le vecteur de Poisson d'un solide ?

ii. Déterminez, en justifiant, dans quel cas le mouvement d'un point matériel de 'masse variable' soumis à une force **F** peut être décrit par l'équation

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{F}$$

iii. Définissez brièvement mais aussi complètement que possible les termes suivants.

(a) Force conservative.

(b) Orbite géostationnaire.

(c) Toupie forte.

Question II

Une particule P de masse m, assimilée à un point matériel, se déplace sans frottement sur une portion de parabole d'équation

$$z = \frac{x^2}{2p}, \qquad x \in [-2p, 2p]$$

où OZ est dirigé verticalement vers le haut et $p > 0$ est un paramètre constant. La parabole tourne autour de l'axe OZ à la vitesse angulaire constante Ω. La liaison entre le point et la parabole est bilatérale.

i. Relevez toutes les forces agissant sur la particule en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la particule dans les axes liés à la parabole.

iii. Montrez que le mouvement de la particule peut être décrit par l'intégrale première

$$\dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) + \left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right) x^2 = \text{Constante}$$

Précisez l'interprétation physique éventuelle de cette intégrale première. Justifiez.

iv. Déterminez les positions d'équilibre relatif et leur stabilité par la méthode de votre choix en discutant si nécessaire en fonction des paramètres du problème.

v. Déterminez la période des petites oscillations autour des éventuelles positions d'équilibre stable.

vi. Déterminez les conditions sur les paramètres du problème pour qu'une particule puisse atteindre une extrémité de la portion de parabole et quitter celle-ci si elle est abandonnée sur la parabole à une hauteur $z = p/2$ sans vitesse initiale par rapport à la parabole.

Dans ces conditions, déterminez la norme de la vitesse absolue de la particule au moment où elle quitte la parabole.

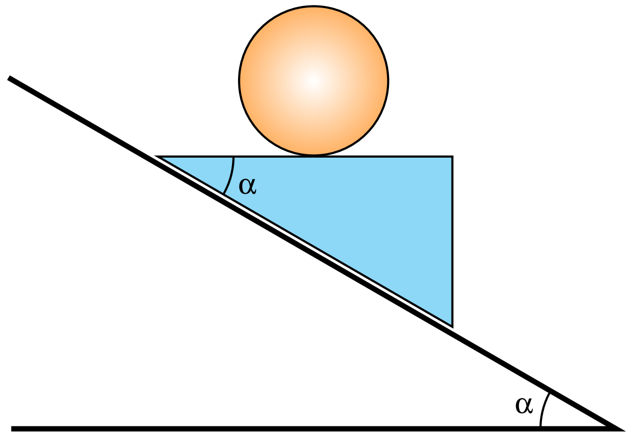
Question III

On lâche un bloc prismatique de masse M et d'angle α en haut d'un plan incliné d'un même angle α par rapport à l'horizontale. Une sphère homogène de masse m et de rayon a roule sans glisser sur la face horizontale du bloc (voir figure). Les deux solides sont initialement au repos.

Le contact entre le bloc prismatique et la sphère est ponctuel. Le mouvement est plan. Seule la phase initiale du mouvement pendant laquelle la sphère roule sans glisser sur le bloc prismatique fait l'objet de cette étude.

Les coefficients de frottement entre le bloc et la sphère et entre le plan et le bloc sont notés respectivement μ_s et μ_p.

Le tenseur central d'inertie de la sphère vaut $\dfrac{2ma^2}{5}\mathbf{I}$.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système constitué du bloc et de la sphère. Justifiez.
ii. Établissez la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le bloc.
iii. Relevez toutes les forces agissant sur la sphère et sur le bloc en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative, force interne/externe).
iv. Écrivez[†] le théorème de la quantité de mouvement pour le système constitué de la sphère et du bloc.
v. Écrivez[†] le théorème de l'énergie cinétique (dans des axes absolus) pour le système constitué de la sphère et du bloc.
vi. Écrivez[†] le théorème de la quantité de mouvement pour la sphère seule.
vii. Écrivez[†] le théorème du moment cinétique pour la sphère rapporté à des axes centrés en son centre d'inertie et parallèles à des axes inertiaux.
viii. Écrivez, sans le résoudre, un système d'équations permettant de déterminer le mouvement du système.
ix. Dans le cas particulier où le bloc glisse sans frottement sur le plan incliné ($\mu_p = 0$), déterminez la loi du mouvement du bloc sur le plan incliné. Dans quel sens la sphère se déplace-t-elle par rapport au bloc ?

[†] Explicitez chacune des résultantes cinématiques et dynamiques intervenant dans les théorèmes.

SOLUTION

Question I

i. L'énergie cinétique d'un solide rapportée à un système d'axes centrés au centre d'inertie et constamment parallèles à des axes inertiaux est donnée par

$$T_C = \frac{1}{2}\int \|\mathbf{v}_r\|^2\, dm$$

où $\mathbf{v}_r$ désigne le vecteur vitesse par rapport au repère considéré.

Introduisant la dérivée relative par rapport à un système d'axes liés au solide et son vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$, on peut exprimer $\mathbf{v}_r$ sous la forme (où $\mathbf{r}$ désigne le vecteur position par rapport au repère considéré)

$$\mathbf{v}_r = \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r} \tag{1}$$

puisque la position relative d'un point quelconque du solide est constante dans les axes liés au solide.

Ceci permet d'écrire T_C sous la forme,

$$\begin{aligned}
T_C &= \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})\, dm \\
&= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}\cdot\left[\mathbf{r}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})\right] dm \\
&= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}\cdot\left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}\right] dm \\
&= \frac{1}{2}\int \|\mathbf{r}\|^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2-(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})^2 dm
\end{aligned}$$

En introduisant le tenseur d'inertie en C

$$\mathbf{J}_C = \int \|\mathbf{r}\|^2\mathbf{I}-\mathbf{r}\,\mathbf{r}\, dm$$

il vient finalement

$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega}$$

Un relation semblable

$$T_B = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_B\cdot\boldsymbol{\omega}$$

peut être écrite par rapport à n'importe quel système d'axes par rapport auquel le champ des vitesses peut être décrit par (1), *i.e.* par rapport à tout système d'axes parallèles à des axes inertiaux et centrés en un point B fixe par rapport au solide. Le mouvement du solide par rapport à un tel référentiel se réduit à un mouvement de rotation.

ii. L'équation du mouvement d'un point matériel de masse variable soumis à une force $\mathbf{F}$ s'écrit

$$m\frac{d\dot{\mathbf{s}}}{dt} = \mathbf{F}+\mathbf{P} = \mathbf{F}+\frac{dm}{dt}\mathbf{w} \tag{2}$$

puisque la poussée $\mathbf{P}$ est donnée par

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w}$$

où $\mathbf{w}$ est la vitesse relative par rapport au système à masse variable des matières qui vont être absorbées ou qui ont été éjectées.

L'équation donnée

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{F}$$

peut s'écrire

$$m\frac{d\dot{\mathbf{s}}}{dt} = \mathbf{F}-\frac{dm}{dt}\dot{\mathbf{s}} \tag{3}$$

Les expressions (2) et (3) ne sont équivalentes que si $\mathbf{w} = -\dot{\mathbf{s}}$, c'est-à-dire si les matières qui vont être absorbées ou qui ont été éjectées sont au repos absolu.

iii. (a) Une force $\mathbf{F}$ est dite conservative si elle dérive d'un potentiel, *i.e.* si elle peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{s})$$

où V est une fonction de la position uniquement.

Le travail d'une force conservative déplaçant sont point d'application entre deux points A et B ne dépend pas du chemin $\mathcal{C}$ suivi pour aller de A à B, *i.e.*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{C}} \nabla V \cdot d\mathbf{s} = V(\mathbf{s}_A) - V(\mathbf{s}_B)$$

(b) L'orbite géostationnaire est l'orbite équatoriale pour laquelle la vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la Terre est précisément égale à la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. Tous les satellites de communication sont placés en orbite géostationnaire afin de rester à l'aplomb de la zone qu'ils doivent desservir.

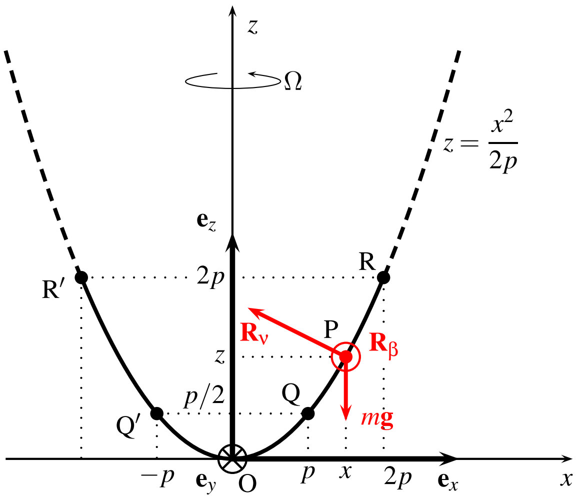
Le rayon de l'orbite géostationnaire GEO est donné par

$$R_{\text{GEO}} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

où T est égal à un jour sidéral, M est la masse de la Terre et G la constante de Cavendish. L'altitude d'une telle orbite est approximativement de 35 800 kilomètres.

(c) La toupie forte est un solide de révolution dont la rotation rapide autour de son axe de symétrie de révolution assure l'équilibre stable dans la position verticale supérieure. La toupie reste verticale en dépit de la force de pesanteur qui tend à faire basculer son axe de rotation lors de toute perturbation de l'équilibre.

Question II



i. Les forces agissant sur le point sont :

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative ;
- $\mathbf{R}_\nu$, force de liaison selon la normale principale à la parabole ;
- $\mathbf{R}_\beta$, force de liaison selon la binormale à la parabole.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement de la particule s'écrit, dans les axes absolus,

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de la particule par rapport à l'origine des axes située au sommet de la parabole.

Introduisons la dérivée relative $\frac{\delta}{\delta t}$ par rapport aux axes $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ liés à la parabole en rotation à la vitesse angulaire Ω constante autour de $\mathbf{e}_z$. La formule de Poisson permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}$$

et

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}\right) + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}\right) = \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega \mathbf{e}_z \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega^2 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{s})\mathbf{e}_z - \Omega^2 \mathbf{s}$$

L'équation différentielle s'écrit donc, dans les axes liés à la parabole,

$$m\left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega \mathbf{e}_z \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega^2 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{s})\mathbf{e}_z - \Omega^2 \mathbf{s}\right] = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$$

iii. Multipliant l'équation précédente scalairement par la vitesse relative, on obtient

$$m\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + m\Omega^2 (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{s}) \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{e}_z\right) - m\Omega^2 \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{s}\right) = -mg \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{e}_z\right)$$

puisque la vitesse relative est tangente à la parabole.
Cette équation peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2} m \frac{\delta}{\delta t}\left[\left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2\right] + \frac{1}{2} m\Omega^2 \frac{\delta}{\delta t}\left[(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z)^2\right] - \frac{1}{2} m\Omega^2 \frac{\delta}{\delta t}\left[\|\mathbf{s}\|^2\right] = -mg\frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z)$$

soit, après intégration temporelle,

$$\frac{1}{2} m \left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 + \frac{1}{2} m\Omega^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z)^2 - \frac{1}{2} m\Omega^2 \|\mathbf{s}\|^2 = -mg(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z) + \text{Constante} \qquad (4)$$

Bien que présentant les dimensions d'une énergie, cette intégrale première n'exprime pas la conservation de l'énergie ; l'énergie n'est pas conservée car la force de liaison $\mathbf{R}_\beta$ développe une puissance non nulle au cours du mouvement.

En exprimant le vecteur position dans les axes de coordonnées cartésiennes (voir dessin) et en tenant compte de la liaison due à la courbe de guidage, on a

$$\mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z = x\mathbf{e}_x + \frac{x^2}{2p}\mathbf{e}_z$$

et

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \frac{x\dot{x}}{p}\mathbf{e}_z$$

soit, en remplaçant dans l'intégrale première (4),

$$\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right) + \Omega^2\frac{x^4}{4p^2} - \Omega^2 x^2 - \Omega^2\frac{x^4}{4p^2} + g\frac{x^2}{p} = C$$

ou encore, comme annoncé,

$$\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right) + \left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right)x^2 = C \tag{5}$$

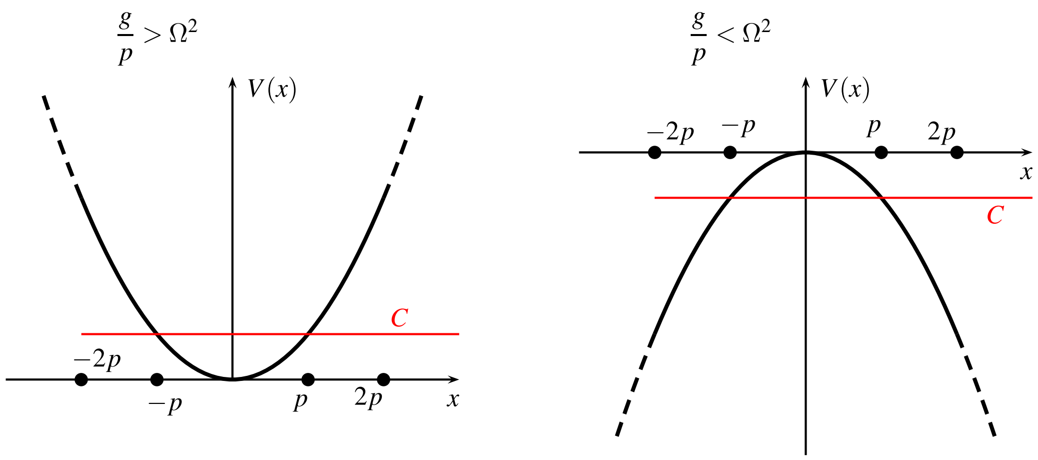
où C est une constante.

iv. Puisque

$$1 + \frac{x^2}{p^2} > 0$$

le mouvement peut être étudié sur le diagramme du pseudo-potentiel

$$V(x) = \left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right)x^2$$



- Si $g/p > \Omega^2$, il y a une position d'équilibre stable en $x = 0$ puisqu'il s'agit d'un minimum du potentiel.
- Si $g/p < \Omega^2$, il y a une position d'équilibre instable en $x = 0$ puisqu'il s'agit d'un maximum du potentiel.
- Si $g/p = \Omega^2$, l'équilibre est indifférent. La particule reste au repos par rapport à la parabole quelle que soit la position où on la dépose initialement sans vitesse relative.

v. De l'étude menée au point précédent, il apparait qu'un équilibre stable est possible en $x = 0$ dans le cas où $g/p > \Omega^2$. Pour étudier le mouvement autour de cette configuration d'équilibre, dérivons l'intégrale première (5) par rapport au temps. On obtient

$$2\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right) + \dot{x}^2\frac{2x}{p^2} + 2x\left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right) = 0$$

et, après linéarisation autour de la position d'équilibre $x = 0$,

$$\ddot{x} + \left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right)x = 0$$

Les petites oscillations de la particule autour de la position d'équilibre $x = 0$ sont donc caractérisées par une période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{p} - \Omega^2}}$$

où $g/p - \Omega^2 > 0$ dans le cas de la position d'équilibre stable.

vi. La constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première (5) peut être déterminée en utilisant les conditions initiales

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \dot{x} = 0$$

et

$$z = \frac{p}{2} \quad \text{soit} \quad x = \pm p \quad \text{(point Q ou Q}'\text{)}$$

On obtient $C = gp - \Omega^2 p^2$ et l'intégrale première (5) s'écrit maintenant

$$\dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) + \left(\frac{g}{p} - \Omega^2\right) x^2 = gp - \Omega^2 p^2 \tag{6}$$

Les diagrammes de potentiel, établis au point iv. et sur lesquels nous pouvons tracer la droite correspondant à la valeur de la constante C, nous apprennent que la particule n'aura assez d'énergie pour atteindre une extrémité de la parabole que dans le cas où $\Omega^2 > g/p$. Dans ce cas, la particule initialement déposée au point Q ($x = p$) se déplace jusqu'au point R ($x = 2p$) et quitte la parabole. Si elle est déposée au point Q′ ($x = -p$), elle quitte la parabole en R′ ($x = -2p$).

La vitesse absolue s'exprime par

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}$$

soit

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \frac{x\dot{x}}{p}\mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \frac{x\dot{x}}{p}\mathbf{e}_z + \Omega x \mathbf{e}_y$$

et donc

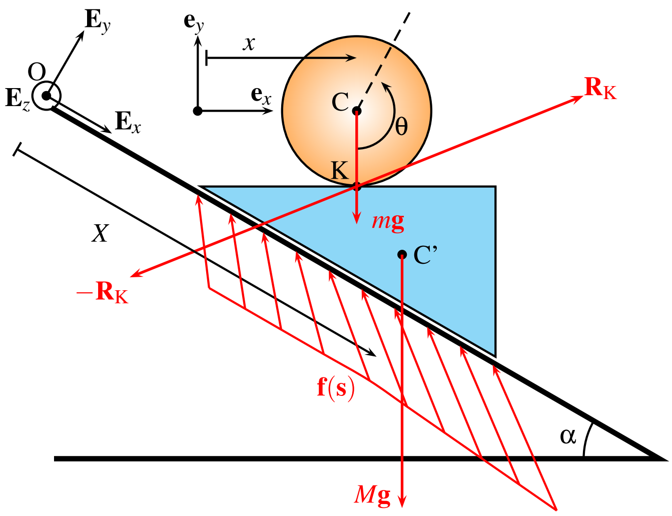
$$\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \dot{x}^2 \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) + \Omega^2 x^2$$

Au point R où $x = 2p$, on a, en utilisant l'intégrale première (6),

$$\|\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{R}\|^2 = 7\Omega^2 p^2 - 3gp$$

La même valeur est obtenue pour la norme de la vitesse absolue en R′.

Question III



i. Chacun des solides possède au maximum 3 degrés de liberté puisque le mouvement est plan.

   Le bloc glisse sur le plan et ne possède donc qu'un seul degré de liberté représenté par la coordonnée X de son centre d'inertie C$'$.

   La sphère roule sur le bloc. Son mouvement peut être repéré par la coordonnée x de son centre d'inertie mesurée dans les axes $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ liés au bloc et l'angle θ de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du mouvement (voir dessin). Le roulement sans glissement de la sphère sur le bloc introduit une liaison de sorte que la sphère possède aussi un seul degré de liberté.

   Au total, le système possède donc deux degrés de liberté.

ii. Le roulement sans glissement de la sphère sur le bloc s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels de la sphère et du bloc en contact au point géométrique K (voir dessin) à un instant donné, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^{sphere} = \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K}^{bloc} = \dot{X}\mathbf{E}_x$$

   Le vecteur de Poisson de la sphère est $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z$ et la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{X}\mathbf{E}_x + \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (-a\mathbf{e}_y) = \dot{X}\mathbf{E}_x + \dot{x}\mathbf{e}_x + a\dot{\theta}\mathbf{e}_x = \dot{X}\mathbf{E}_x$$

   soit

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{7}$$

iii. Les forces agissant sur la sphère sont :

   - $m\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
   - $\mathbf{R}_\mathrm{K} = N_\mathrm{K}\mathbf{e}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{e}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K ;

   Les forces agissant sur le bloc sont :

   - $M\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C$'$;
   - $-\mathbf{R}_\mathrm{K} = -N_\mathrm{K}\mathbf{e}_x - T_\mathrm{K}\mathbf{e}_y$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K ;
   - $\mathbf{f}(\mathbf{s})$: distribution surfacique de forces de liaison agissant sur la surface Σ du bloc en contact avec le plan, de direction inconnue dans le plan du mouvement. Notons $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$ la résultante de cette distribution.

   Les forces $\pm\mathbf{R}_\mathrm{K}$ sont des forces internes au système constitué de la sphère et du bloc.

iv. Le théorème de la quantité de mouvement pour le système constitué de la sphère et du bloc s'écrit, dans les axes absolus en O,

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = \mathbf{G}^{ext} = m\mathbf{g} + M\mathbf{g} + \mathbf{R} = (m+M)\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

   où seules les forces externes interviennent dans la résultante.

La quantité de mouvement du système est donnée par

$$\mathbf{N}_{\mathrm{O}} = \mathbf{N}_{\mathrm{O}}^{sphere} + \mathbf{N}_{\mathrm{O}}^{bloc} = m\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + M\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C'}} = m(\dot{X}\mathbf{E}_x + \dot{x}\mathbf{e}_x) + M\dot{X}\,\mathbf{E}_x = (m+M)\dot{X}\mathbf{E}_x + m\dot{x}\mathbf{e}_x$$

On a donc finalement

$$(m+M)\ddot{X}\mathbf{E}_x + m\ddot{x}\mathbf{e}_x = (m+M)\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

En projetant cette équation respectivement sur $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$, on obtient

$$(m+M)\ddot{X} + m\ddot{x}\cos\alpha = (m+M)g\sin\alpha + T \tag{8}$$
$$m\ddot{x}\sin\alpha = -(m+M)g\cos\alpha + N \tag{9}$$

v. Le théorème de l'énergie cinétique pour le système constitué de la sphère et du bloc s'écrit, dans les axes absolus en O,

$$\dot{T}_{\mathrm{O}} = P_{\mathrm{O}}^{ext+int} = M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C'}} + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{sphere} - \mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bloc} + \int_{\Sigma}\mathbf{f}(\mathbf{s})\cdot\dot{\mathbf{s}}\,d\sigma$$

où les forces externes et internes contribuent à la puissance. On a

$$T_{\mathrm{O}} = T_{\mathrm{O}}^{sphere} + T_{\mathrm{O}}^{bloc}$$

où

$$T_{\mathrm{O}}^{bloc} = \frac{1}{2}M\dot{X}^2$$

et

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{O}}^{sphere} &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 + T_{\mathrm{C}} \\
&= \frac{1}{2}m\|\dot{X}\mathbf{E}_x + \dot{x}\mathbf{e}_x\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{X}\cos\alpha) + \frac{1}{2}\frac{2ma^2}{5}\dot{\theta}^2 \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{X}\cos\alpha) + \frac{ma^2}{5}\dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

Tenant compte de la condition de roulement sans glissement, du caractère conservatif des forces de pesanteur et de la vitesse $\dot{\mathbf{s}} = \dot{X}\mathbf{E}_x$ des points du bloc, le théorème s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{X}\cos\alpha) + \frac{ma^2}{5}\dot{\theta}^2\right] &= -\frac{d}{dt}(V_{Mg} + V_{mg}) + \dot{X}\mathbf{E}_x\cdot\int_{\Sigma}\mathbf{f}(\mathbf{s})\,d\sigma \\
&= -\frac{d}{dt}(V_{Mg} + V_{mg}) + \dot{X}\mathbf{E}_x\cdot\mathbf{R} \\
&= -\frac{d}{dt}(V_{Mg} + V_{mg}) + \dot{X}T
\end{aligned}$$

où

$$V_{Mg} = -MgX\sin\alpha \quad \text{et} \quad V_{mg} = -mgX\sin\alpha$$

soit, finalement,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{X}\cos\alpha) + \frac{ma^2}{5}\dot{\theta}^2\right] = \frac{d}{dt}\Big[(m+M)gX\sin\alpha\Big] + \dot{X}T \tag{10}$$

vi. Le théorème de la quantité de mouvement pour la sphère seule, s'écrit, dans les axes absolus en O,

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}}^{sphere} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}}$$

où

$$\mathbf{N}_{\mathrm{O}}^{sphere} = m(\dot{X}\mathbf{E}_x + \dot{x}\mathbf{e}_x)$$

On a donc

$$m\ddot{X}\mathbf{E}_x + m\ddot{x}\mathbf{e}_x = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}}$$

En projetant cette équation respectivement sur $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, on obtient

$$m\ddot{x} + m\ddot{X}\cos\alpha = T_{\mathrm{K}} \tag{11}$$
$$-m\ddot{X}\sin\alpha = -mg + N_{\mathrm{K}} \tag{12}$$

vii. Écrivons le théorème du moment cinétique pour la sphère rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C. Il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

où

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = -a\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{R}_\mathrm{K} = -a\mathbf{e}_y \wedge (N_\mathrm{K}\mathbf{e}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{e}_x) = aT_\mathrm{K}\mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = \frac{2ma^2}{5}\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

soit

$$\frac{2}{5}ma\ddot{\theta} = T_\mathrm{K} \tag{13}$$

viii. Les équations (7),(8), (9) et (10) font intervenir les inconnues cinématiques x, X et θ ainsi que les inconnues dynamiques T et N. Il manque donc une équation.

Puisque que le bloc glisse vers le bas ($\dot{X} > 0$) et repose sur le plan incliné ($N > 0$), la loi du frottement sur la base du bloc s'écrit

$$T = -\mu_p N \tag{14}$$

Ce système de 5 équations à 5 inconnues permet de déterminer le mouvement du système.

Les 7 équations (7), (8), (9), (11), (12), (13) et (14) constituent aussi un système permettant de déterminer les 7 inconnues x, X et θ, T, N, T_K et N_K.

ix. Dans le cas particulier où le mouvement a lieu sans frottement ($\mu_p = 0$) sur le plan incliné, les équations (7), (8), (13) et (11) prennent la forme

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{15}$$

$$(m+M)\ddot{X} + m\ddot{x}\cos\alpha = (m+M)g\sin\alpha \tag{16}$$

$$\frac{2}{5}ma\ddot{\theta} = T_\mathrm{K} \tag{17}$$

$$m\ddot{x} + m\ddot{X}\cos\alpha = T_\mathrm{K} \tag{18}$$

Ces équations constituent un système de 4 équations pour les 4 inconnues x, X, θ et T_K.

Les équations (15), (17) et (18) permettent d'écrire

$$\ddot{x} = -\frac{5}{7}\ddot{X}\cos\alpha$$

que l'on introduit dans (16) pour obtenir

$$\ddot{X} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{(m+M) - \frac{5}{7}m\cos^2\alpha}$$

La loi du mouvement du bloc sur le plan incliné s'écrit donc

$$X(t) = \left[\frac{(M+m)g\sin\alpha}{(m+M) - \frac{5}{7}m\cos^2\alpha}\right]\frac{t^2}{2} + X_0$$

où on a tenu compte de la condition initiale $\dot{X} = 0$ et d'une position initiale quelconque $X = X_0$.

On peut ensuite aussi obtenir la loi du mouvement de la sphère par rapport au bloc suivant

$$\ddot{x} = -\frac{5}{7}\ddot{X}\cos\alpha = -\frac{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{7}{5}(m+M) - m\cos^2\alpha}$$

soit

$$x(t) = -\left[\frac{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{7}{5}(m+M) - m\cos^2\alpha}\right]\frac{t^2}{2} + x_0$$

où on a tenu compte de la condition initiale $\dot{x} = 0$ et d'une position initiale quelconque $x = x_0$.

L'expression entre crochets étant toujours strictement positive, la sphère se déplace sur le bloc dans le sens opposé au mouvement du bloc.