Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2022

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'enveloppe et le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez mathématiquement le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_C$ d'un solide indéformable.

ii. En raisonnant sur les produits d'inertie, montrez que l'axe de symétrie de révolution OZ d'un solide est principal d'inertie.

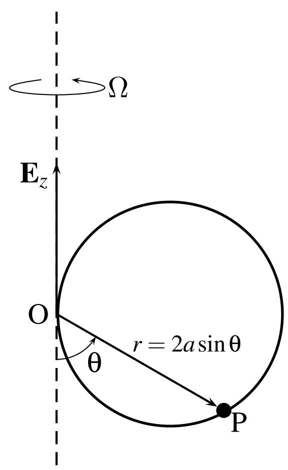
iii. Établissez la relation entre le moment cinétique $\mathbf{H}_C$ d'un solide par rapport à un système d'axes centré au centre d'inertie et gardant une orientation fixe (repère de Kœnig) et le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_C$.

iv. Montrez que le moment cinétique d'un solide possédant une symétrie de révolution d'axe OZ est parallèle au vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ du solide si celui-ci est orienté selon OZ.
Montrez que ceci n'est pas nécessairement le cas si $\boldsymbol{\omega}$ n'est pas orienté selon OZ.

Question II

On étudie le mouvement d'un point matériel de masse m qui glisse sans frottement sur une courbe de guidage circulaire, de rayon a, située dans un plan vertical et tournant à la vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe vertical tangent au cercle en O. En coordonnées polaires, la courbe est décrite par l'équation

$$r = 2a\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi]$$



i. Relevez toutes les forces agissant sur le point matériel et précisez-en les caractéristiques principales (force appliquée ou force de liaison, force conservative, direction).

ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel dans les axes liés à la courbe de guidage.

iii. Établissez une intégrale première scalaire du mouvement et donnez-en la signification physique éventuelle.

iv. Montrez que cette intégrale première peut s'exprimer sous la forme

$$\dot{\theta}^2 - \beta\,\Omega^2\sin^4\theta - \frac{g}{a}\sin\theta\cos\theta = \text{constante}$$

où β est une constante à déterminer.

v. Déterminez la vitesse de rotation Ω pour laquelle un équilibre relatif existe en $\theta = \pi/3$.

vi. Étudiez la stabilité de l'équilibre en $\theta = \pi/3$ dans les conditions définies en v. et décrivez qualitativement le mouvement du point lorsqu'il est écarté légèrement de cette position d'équilibre.

Tournez la page.

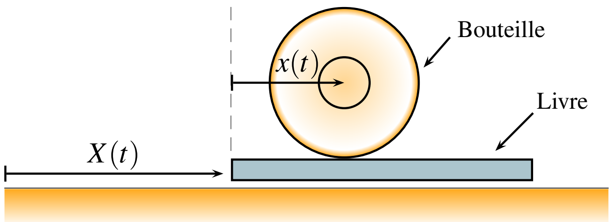
Question III

Épuisé par la recherche d'une question d'examen originale, courte et accessible, un professeur lance une bouteille (vide) sur son bureau horizontal couvert de livres. La bouteille entre ainsi en contact avec un livre de mécanique posé sur le bureau.

Le coefficient de frottement entre la bouteille et le livre est noté μ. La bouteille peut rouler et glisser sur le livre. Il n'y a pas de frottement entre le livre et le bureau.

Le mouvement est plan. On repère la position du livre par sa coordonnée $X(t)$ et la position du centre d'inertie de la bouteille par rapport au livre par la variable $x(t)$. On étudie uniquement la phase du mouvement lors de laquelle la bouteille est en contact (ponctuel) avec le livre.

La bouteille est assimilée à un solide de révolution de masse m et de rayon extérieur a. Le moment central d'inertie de la bouteille par rapport à son axe de symétrie est noté J. Le livre est modélisé comme un bloc prismatique homogène de masse M.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système constitué du livre et de la bouteille et précisez les coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur le système ou entre ses éléments en précisant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force interne ou externe, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement pour la bouteille.

iv. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement pour le livre.

v. Écrivez* le théorème du moment cinétique pour la bouteille par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie.

vi. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique dans un repère inertiel pour le système constitué de la bouteille et du livre.

À l'instant initial, la bouteille est animée d'une vitesse horizontale $v_0 > 0$ par rapport au livre mais ne possède pas de vitesse de rotation autour de son centre d'inertie. Le livre est initialement au repos.

vii. Déterminez la loi du mouvement de la bouteille par rapport au livre pendant la première phase du mouvement lors de laquelle la bouteille roule et glisse sur le livre.

viii. Déterminez le temps $t^\star$ au bout duquel la bouteille cesse de glisser sur le livre.

ix. Déterminez la vitesse du livre lorsque la bouteille roule sans glisser sur le livre, *i.e.* pour $t > t^\star$.

---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans le théorème.

Question I

i. Le tenseur central d'inertie d'un solide indéformable est défini mathématiquement par

$$\mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \int \left[\|\mathbf{r}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}\right] \; dm$$

où $\mathbf{r}$ désigne le vecteur position des points du solide par rapport à son centre d'inertie.

ii. L'axe OZ est principal d'inertie si les produits d'inertie

$$J_{xz} = \int xz\, dm, \qquad \text{et} \qquad J_{yz} = \int yz\, dm$$

sont nuls.

Lorsqu'un solide possède une symétrie de révolution d'axe OZ, à tout élément de matière dm de coordonnées (x,y,z) correspond un élément de matière de même masse situé en $(-x,y,z)$. Les contributions de ces deux masses élémentaires au produit d'inertie J_{xz} se compensent puisque

$$x \times z \times dm + (-x) \times z \times dm = 0$$

De même, en vertu de la symétrie, au même élément de matière dm situé en (x,y,z) correspond un élément de matière de même masse situé en $(x,-y,z)$. Les contributions à J_{yz} se compensent également puisque

$$y \times z \times dm + (-y) \times z \times dm = 0$$

Dès lors, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, ce qui montre que l'axe OZ est principal d'inertie.

iii. Le moment cinétique d'un solide par rapport à un système d'axes centré au centre d'inertie et conservant une direction constante s'exprime sous la forme

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \int \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \;\; dm$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{CP}$ désigne le vecteur position du point P du solide par rapport à C.

Introduisant la dérivée relative par rapport à un système d'axes liés au solide et son vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$, on peut exprimer $\dot{\mathbf{r}}$ sous la forme

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

puisque $\mathbf{r}$ est constant dans les axes liés au solide.

En injectant ce résultat dans l'expression du moment cinétique, et en utilisant la propriété

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$$

du double produit vectoriel, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\mathrm{C}} &= \int \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \;\; dm \\
&= \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\, \mathbf{r} \;\; dm \\
&= \left(\int \left[\|\mathbf{r}\|^2\, \mathbf{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}\right] \;\; dm \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

qui constitue la relation recherchée entre $\mathbf{H}_{\mathrm{C}}$ et $\mathbf{J}_{\mathrm{C}}$.

iv. L'axe OZ étant principal d'inertie, on peut construire un système d'axes principaux d'inertie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal. Il peut donc être exprimé sous la forme [1]

$$\mathbf{J}_C = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + J_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

Dès lors, si $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, on obtient

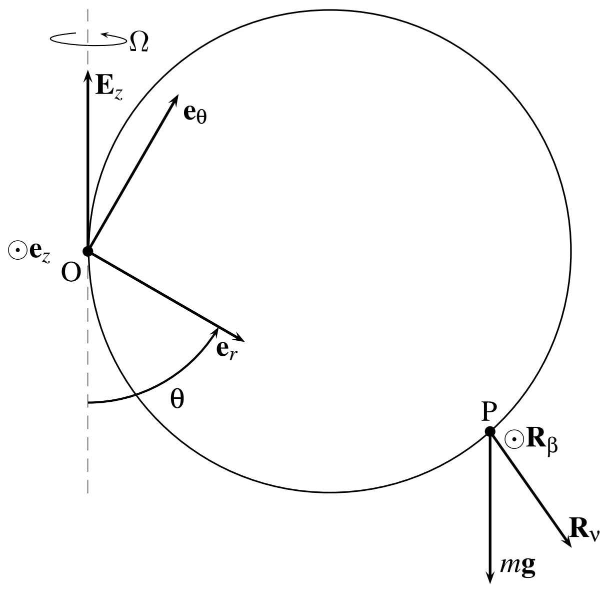
$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_1 \omega (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_z)\, \mathbf{e}_1 + J_2 \omega (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_z)\, \mathbf{e}_2 + J_z \omega (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z)\, \mathbf{e}_z = J_z \omega \mathbf{e}_z = J_z \boldsymbol{\omega}$$

(puisque $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_z = 0$) de sorte que $\mathbf{H}_C$ est effectivement parallèle à $\boldsymbol{\omega}$ dans ce cas.
Ce résultat ne s'applique pas quelle que soit la direction de $\boldsymbol{\omega}$. Par exemple, si $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_z \mathbf{e}_z$, on calcule

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + J_z \omega_z \mathbf{e}_z$$

qui n'est pas parallèle à $\boldsymbol{\omega}$ (sauf si $J_1 = J_z$).
Plus généralement, si $\mathbf{e}$ est principal d'inertie et $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$, alors $\mathbf{H}_C = J_e \boldsymbol{\omega}$ où J_e est le moment d'inertie pour la rotation autour de $\mathbf{e}$.

Question II



i. Les forces agissant sur le point P sont
- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_z$: force appliquée conservative ;
- $\mathbf{R}_\nu$: force de liaison agissant selon la normale principale au cercle ;
- $\mathbf{R}_\beta$: force de liaison agissant selon la binormale au cercle.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de P par rapport au point fixe O.
Introduisant la dérivée temporelle $\frac{\delta}{\delta t}$ dans les axes de vecteur de Poisson $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{E}_z$ liés au cercle, on a

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{s}$$

1. On peut aussi montrer que $J_1 = J_2$.

et

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{s}) = \frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2\mathbf{s}$$

On a alors

$$m\left(\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2\mathbf{s}\right) = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$$

qui constitue l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel dans les axes liés à la courbe de guidage.

iii. Multipliant scalairement cette équation par la vitesse relative $\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}$, tangente au cercle, on élimine la force de Coriolis et les forces de liaison :

$$\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right) - \Omega^2\left(\mathbf{s}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right) = \mathbf{g}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}$$

Après intégration temporelle, on obtient l'intégrale première scalaire du mouvement

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{g}\cdot\mathbf{s} + \text{constante} \tag{1}$$

Cette intégrale première ne représente pas la conservation de l'énergie car la force de liaison $\mathbf{R}_\beta$ développe une puissance non nulle. On a en effet

$$\mathbf{R}_\beta\cdot\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}_\beta\cdot\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{s}\right) = \mathbf{R}_\beta\cdot(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{s}) \neq 0$$

iv. Exprimons maintenant l'intégrale première (1) en fonction de la coordonnée généralisée θ en introduisant les coordonnées polaires liées au point P dans le plan du cercle. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s} = r\,\mathbf{e}_r = 2a\sin\theta\,\mathbf{e}_r\\
&\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta = 2a\cos\theta\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r + 2a\sin\theta\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\\
&\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 = 4a^2\dot{\theta}^2\\
&\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = 4a^2\Omega^2\sin^2\theta\\
&\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s} = 2a\Omega\sin\theta\,(\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{e}_r) = -2a\Omega\sin\theta\cos\theta\\
&\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -2ag\sin\theta\,(\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{e}_r) = 2ag\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

et, en remplaçant dans (1),

$$2a^2\dot{\theta}^2 + 2a^2\Omega^2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2a^2\Omega^2\sin^2\theta - 2ag\sin\theta\cos\theta = \text{constante}$$

ou encore

$$2a^2\dot{\theta}^2 - 2a^2\Omega^2\sin^4\theta - 2ag\sin\theta\cos\theta = \text{constante}$$

soit

$$\dot{\theta}^2 - \Omega^2\sin^4\theta - \frac{g}{a}\sin\theta\cos\theta = \text{constante} \tag{2}$$

de sorte que la constante $\beta = 1$.

v. Un équilibre relatif existe en $\theta = \pi/3$ si ce point est un point stationnaire du pseudo-potentiel

$$\mathcal{V}(\theta) = -\Omega^2\sin^4\theta - \frac{g}{a}\sin\theta\cos\theta$$

c'est-à-dire si

$$\left[\frac{d\mathcal{V}}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0$$

On calcule

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\theta} = -4\Omega^2 \sin^3\theta\cos\theta - \frac{g}{a}\cos^2\theta + \frac{g}{a}\sin^2\theta$$

et

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\mathcal{V}}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}} &= -4\Omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\frac{1}{2} - \frac{g}{a}\frac{1}{4} + \frac{g}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\Omega^2 + \frac{g}{2a}\end{aligned}$$

La vitesse de rotation Ω pour laquelle un équilibre existe en $\theta = \pi/3$ est donc donnée par

$$\Omega^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{g}{a}$$

vi. On calcule

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathcal{V}}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-4\Omega^2\sin^3\theta\cos\theta - \frac{g}{a}\cos^2\theta + \frac{g}{a}\sin^2\theta\right) \\ &= -12\Omega^2\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\Omega^2\sin^4\theta + 2\frac{g}{a}\cos\theta\sin\theta + 2\frac{g}{a}\sin\theta\cos\theta \\ &= -12\Omega^2\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\Omega^2\sin^4\theta + 4\frac{g}{a}\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

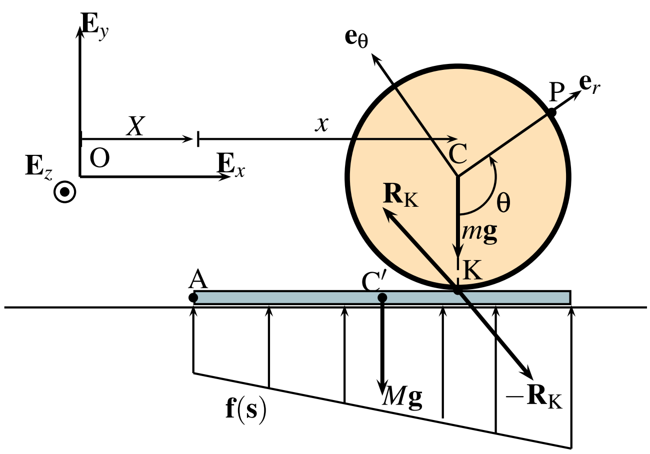
On a alors

$$\left[\frac{d^2\mathcal{V}}{d\theta^2}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -12\Omega^2\frac{3}{4}\frac{1}{4} + 4\Omega^2\frac{9}{16} + 4\frac{g}{a}\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\frac{g}{a} > 0$$

qui ne dépend pas de la valeur de Ω.

L'équilibre est donc (marginalement) stable puisque la position d'équilibre $\theta = \pi/3$ est un minimum du pseudo-potentiel. Si on écarte légèrement le point matériel de sa position d'équilibre, il présentera de petites oscillations d'amplitude constante autour de celle-ci, en étant entrainé dans un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de $\mathbf{E}_z$.

Question III



i. Le livre est en mouvement plan (3 ddl maximum) et glisse sans rotation (1 liaison) en restant en contact avec le plan horizontal (1 liaison). Il possède donc un seul degré de liberté qui peut être représenté par la variable X mesurant la distance horizontale entre le point O et son extrémité A (voir figure).

La bouteille est également en mouvement plan (3 ddl maximum) et reste en contact avec le livre (une liaison). Son mouvement peut être décrit par la coordonnée x mesurant la distance horizontale entre le point A (dont le mouvement est connu si X est connu) et le centre d'inertie C et par l'angle θ mesurant la rotation de la bouteille autour de son axe de symétrie de révolution (voir figure).

Au total le système constitué du livre et de la bouteille possède donc 3 degrés de liberté et les coordonnées généralisées X, x et θ permettent d'en décrire le mouvement.

ii. Les forces agissant sur la bouteille sont

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_y$: Force de pesanteur appliquée en C, conservative.
- $\mathbf{R}_\mathrm{K} = N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x$: Force de liaison exercée par le livre sur la bouteille en K, de direction inconnue dans le plan du mouvement.

Les forces agissant sur le livre sont

- $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{E}_y$: Force de pesanteur appliquée au centre d'inertie C′ du livre et conservative.
- $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s})\mathbf{E}_y$: Distribution surfacique de forces de liaison agissant perpendiculairement à la surface Σ du livre en contact avec le plan vu l'absence de frottement. Notons $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y$ la résultante de ces forces surfaciques.
- $-\mathbf{R}_\mathrm{K} = -N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y - T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x$: Force de liaison exercée par la bouteille sur le livre en K, de direction inconnue dans le plan du mouvement.

Toutes ces forces sont des forces extérieures au système constitué de la bouteille et du livre à l'exception de $\mathbf{R}_\mathrm{K}$ et $-\mathbf{R}_\mathrm{K}$ qui s'exercent entre deux éléments du système et sont donc des forces internes.

iii. Appliquant le théorème de la quantité de mouvement à la bouteille, il vient

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^{bouteille} = -mg\mathbf{E}_y + \mathbf{R}_\mathrm{K}$$

où

$$\mathbf{N}_\mathrm{O}^{bouteille} = m\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = m(\dot{X} + \dot{x})\mathbf{E}_x$$

soit

$$m(\ddot{X} + \ddot{x})\mathbf{E}_x = -mg\mathbf{E}_y + \mathbf{R}_\mathrm{K} \tag{3}$$

iv. Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au livre donne

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^{livre} = -Mg\mathbf{E}_y - \mathbf{R}_\mathrm{K} + N\mathbf{E}_y$$

où

$$\mathbf{N}_\mathrm{O}^{livre} = M\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}'} = M\dot{X}\mathbf{E}_x$$

soit

$$M\ddot{X}\mathbf{E}_x = -Mg\mathbf{E}_y - \mathbf{R}_\mathrm{K} + N\mathbf{E}_y \tag{4}$$

v. Le théorème du moment cinétique pour la bouteille par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C}^{bouteille} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

où

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = -a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R}_\mathrm{K} = -a\mathbf{E}_y \wedge (N_\mathrm{K}\mathbf{E}_y + T_\mathrm{K}\mathbf{E}_x) = aT_\mathrm{K}\mathbf{E}_z$$

Puisque le vecteur de Poisson de la bouteille est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, il vient

$$\mathbf{H}_\mathrm{C}^{bouteille} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = J\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

et, en projetant le théorème sur l'axe $\mathbf{E}_z$,

$$J\ddot{\theta} = aT_\mathrm{K} \tag{5}$$

vi. Le théorème de l'énergie cinétique au point fixe O pour le système total s'écrit

$$\dot{T}_{\mathrm{O}}^{bouteille}+\dot{T}_{\mathrm{O}}^{livre}=P_{\mathrm{O}}^{ext+int}=m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}+M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}'}+\mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}-\mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{livre}+\iint_{\Sigma}\dot{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{f}\,d\sigma$$

D'une part, les vitesses intervenant dans le théorème sont

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}&=(\dot{X}+\dot{x})\mathbf{E}_x\\ \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}'}&=\dot{\mathbf{s}}=\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{livre}=\dot{X}\mathbf{E}_x\\ \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}&=(\dot{X}+\dot{x})\mathbf{E}_x+a\dot{\theta}\mathbf{E}_x\end{aligned}$$

La vitesse $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}$ est calculée en considérant un point P quelconque du pourtour de la bouteille dont le vecteur position s'écrit

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}}=(X+x)\mathbf{E}_x+a\mathbf{e}_r$$

et la vitesse

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}}=(\dot{X}+\dot{x})\mathbf{E}_x+a\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$$

En K, $\mathbf{e}_r=-\mathbf{E}_y$ et $\mathbf{e}_{\theta}=\mathbf{E}_x$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}=(\dot{X}+\dot{x}+a\dot{\theta})\mathbf{E}_x$$

La puissance développée par les différentes forces est donnée par

$$m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}=-mg\mathbf{E}_y\cdot(\dot{X}+\dot{x})\mathbf{E}_x=0$$

$$M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}'}=-Mg\mathbf{E}_y\cdot\dot{X}\mathbf{E}_x=0$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}-\mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{livre}=\mathbf{R}_{\mathrm{K}}\cdot(\dot{x}+a\dot{\theta})\mathbf{E}_x=(\dot{x}+a\dot{\theta})T_{\mathrm{K}}$$

$$\iint_{\Sigma}\dot{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{f}\,d\sigma=\dot{X}\mathbf{E}_x\cdot\iint_{\Sigma}\mathbf{f}\,d\sigma=\dot{X}\mathbf{E}_x\cdot N\mathbf{E}_y=0$$

D'autre part, l'énergie cinétique associée aux deux éléments du système peut être exprimée sous la forme

$$T_{\mathrm{O}}^{livre}=\frac{1}{2}M\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}'}\|^2=\frac{1}{2}M\dot{X}^2$$

et

$$T_{\mathrm{O}}^{bouteille}=\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2+T_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{x}^2+2\dot{X}\dot{x})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{x}^2+2\dot{X}\dot{x})+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Regroupant ces résultats, le théorème peut être exprimé sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{x}^2+2\dot{X}\dot{x})+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{X}^2\right]=(\dot{x}+a\dot{\theta})T_{\mathrm{K}}\tag{6}$$

vii. On cherche à exprimer $x(t)$, la loi du mouvement de la bouteille par rapport au livre. Les projections de l'équation (3) sur les axes $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$ et de l'équation (4) sur $\mathbf{E}_x$ donnent trois équations pour les inconnues x, X, N_{K} et T_{K}.

$$\begin{cases}m(\ddot{X}+\ddot{x})=T_{\mathrm{K}}\\ N_{\mathrm{K}}=mg\\ M\ddot{X}=-T_{\mathrm{K}}\end{cases}$$

L'équation manquante est fournie par la loi du frottement

$$\mathbf{T}_{\mathrm{K}}=-\mu|N_{\mathrm{K}}|\frac{\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{gl}}{\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{gl}\|}$$

où

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{gl}=\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{bouteille}-\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{livre}=(\dot{x}+a\dot{\theta})\mathbf{E}_x$$

Remarquons que le vitesse de glissement $\dot{x}+a\dot{\theta}$ est forcément positive dans la première phase du mouvement étudiée puisque, en $t=0$, $\dot{x}=v_0>0$ et $\dot{\theta}=0$. On a donc

$$T_\mathrm{K}=-\mu|N_\mathrm{K}|=-\mu mg$$

Combinant ces quatre équations, on obtient

$$\ddot{x}=-\mu g\frac{m+M}{M}$$

soit

$$\dot{x}=-\mu g\frac{m+M}{M}\,t+v_0$$

et

$$x=-\mu g\frac{m+M}{M}\,\frac{t^2}{2}+v_0t+x_0$$

où x_0 est la position initiale de la bouteille par rapport au livre.

viii. La bouteille cesse de glisser quand sa vitesse de glissement s'annule, c'est-à-dire quand $\dot{x}+a\dot{\theta}=0$. L'équation (5) donne

$$J\ddot{\theta}=aT_\mathrm{K}=-a\mu mg$$

de sorte que

$$J\dot{\theta}=-a\mu mgt+\dot{\theta}_0=-a\mu mgt$$

On a donc

$$\dot{x}+a\dot{\theta}=-\mu g\frac{m+M}{M}\,t+v_0-\frac{a^2\mu mg}{J}t$$

qui s'annule en

$$t=t^\star=\frac{v_0}{\mu g\left(1+\dfrac{m}{M}+\dfrac{ma^2}{J}\right)}$$

ix. Une phase de roulement sans glissement commence quand $t=t^\star$. La loi du frottement n'est plus de mise et est remplacée par la condition de roulement sans glissement $\dot{x}+a\dot{\theta}=0$. Le mouvement peut alors être décrit par les quatre équations

$$\begin{cases} m(\ddot{X}+\ddot{x})=T_\mathrm{K} \\ M\ddot{X}=-T_\mathrm{K} \\ \ddot{x}+a\ddot{\theta}=0 \\ J\ddot{\theta}=aT_\mathrm{K} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène pour $\ddot{X}$, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$ et T_K qui admet la solution unique $\ddot{X}=0$, $\ddot{x}=0$, $\ddot{\theta}=0$ et $T_\mathrm{K}=0$. La vitesse du livre $\dot{X}$ est donc constante et égale à sa valeur à la fin de la phase de glissement.
L'accélération $\ddot{X}$ durant la phase de glissement est telle que

$$M\ddot{X}=-T_\mathrm{K}=\mu mg$$

de sorte que

$$\dot{X}=\mu g\frac{m}{M}\,t+\dot{X}_0=\mu g\frac{m}{M}\,t$$

puisque le livre est au repos initialement, c'est-à-dire $\dot{X}_0=0$.
On a donc

$$\dot{X}(t^\star)=\mu g\frac{m}{M}\,t^\star=\frac{m}{M}\frac{v_0}{1+\dfrac{m}{M}+\dfrac{ma^2}{J}}=\frac{v_0}{1+\dfrac{M}{m}+\dfrac{Ma^2}{J}}$$

qui est aussi la vitesse constante du livre pendant toute la phase de roulement sans glissement.