

NOM : .....

PRÉNOM : .....

NUMÉRO D'ORDRE : .....



Janvier 2021

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

*Durée de l'épreuve : 3 heures.*

*Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*

*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur cet énoncé votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*

*Rendez l'énoncé avec vos copies.*

### Question I

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe  $\mathbf{e}$  en mouvement dans le champ de la pesanteur autour de son sommet O fixe.

- i. Exprimez et justifiez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie.
- ii. Exprimez (vectoriellement) le théorème du moment cinétique rapporté à des axes fixes centrés en O.
- iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires de ce théorème et leur interprétation physique.
- iv. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer l'orientation de la toupie dans l'espace.
- v. Exprimez le vecteur de Poisson de la toupie en fonction des angles d'Euler.
- vi. Exprimez la conservation du spin en fonction des angles d'Euler.

### Question II

On considère le mouvement d'un point matériel P de masse  $m$  soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale attractive

$$\mathbf{F} = -m\mu r^{-6}\mathbf{e}_r$$

où  $\mu$  désigne une constante strictement positive,  $r$  est la distance entre le point O et le point P et  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire porté par  $\mathbf{OP}$ .

À l'instant initial, le point matériel est situé à une distance  $r_0$  de O et est animé d'une vitesse  $\mathbf{v}_0$  non nulle perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{e}_r$ .

- i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de P.
- ii. Montrez que le mouvement du point matériel est plan.
- iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires du mouvement ainsi que leur interprétation physique.
- iv. Discutez la nature du mouvement sur un diagramme de potentiel en fonction des paramètres du problème.
- v. Déterminez, sans la résoudre, une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la trajectoire du point matériel.

*Tournez la page.*

### Question III

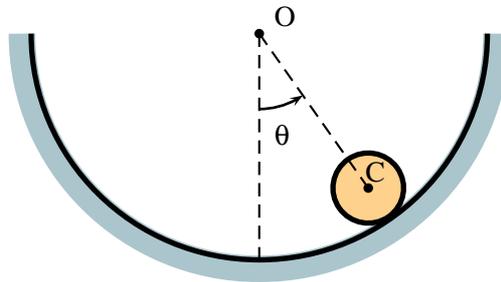
Dans le cadre du contrôle qualité de la production, on dispose un tube à essai de laboratoire (une éprouvette) de rayon  $a$  et de masse  $m$  dans une cavité semi-circulaire fixe de rayon  $b > a$  et d'axe horizontal. Le tube à essai roule sans glisser dans cette cavité en présentant un mouvement plan dans un plan vertical. La mesure de la période des petites oscillations autour de la position verticale inférieure permet de vérifier le respect du cahier des charges.

Le moment central d'inertie du tube à essai pour la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du mouvement est

$$J_C = \frac{4}{5}ma^2$$

On note  $\mu$  le coefficient de frottement entre le tube à essai et la cavité. On repère la position du tube à essai par l'angle  $\theta$  mesuré à partir de la verticale inférieure (voir figure).

Initialement, le tube à essai est au repos à la position  $\theta = \theta_0$ .



- i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du tube à essai et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) appropriée(s) pour en décrire le mouvement.
- ii. Déterminez la relation de roulement sans glissement du tube à essai dans la cavité.
- iii. Relevez toutes les forces agissant sur le tube à essai en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
- iv. Sans faire aucun calcul, expliquez pourquoi le moment d'inertie  $J_C$  d'un tube à essai de masse  $m$  et de rayon  $a$  est proche de la valeur  $ma^2$ .
- v. Écrivez\* le théorème de la quantité de mouvement.
- vi. Écrivez\* le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du tube à essai et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.
- vii. Écrivez\* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertielle et déduisez-en une équation du type

$$\ddot{\theta} + \beta \sin \theta = 0$$

où la constante  $\beta$  est à déterminer.

- viii. Déterminez la loi du mouvement des petites oscillations du tube à essai autour de la position verticale  $\theta = 0$  ainsi que la période de ces oscillations. Comparez cette période à celle d'un pendule simple de longueur  $b - a$  et expliquez la différence.
- ix. Sous l'hypothèse des petites oscillations autour de la verticale, déterminez la valeur maximale de l'angle initial  $\theta_0$  compatible avec le roulement sans glissement.

---

\* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.

SOLUTION

Question I

- i. Le système constitué de l'axe de symétrie de révolution  $\mathbf{e}$  et de tout couple de vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  orthogonaux à  $\mathbf{e}$  et mutuellement orthogonaux constitue un système d'axes principaux pour la toupie. Dès lors, le tenseur d'inertie s'écrit

$$\mathbf{J}_O = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \Gamma \mathbf{e} \mathbf{e}$$

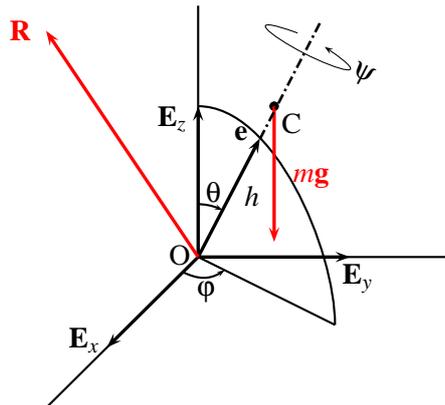
Vu la symétrie de révolution, le solide présente le même moment d'inertie pour la rotation autour de tout axe perpendiculaire à  $\mathbf{e}$  et passant par le point O. Dès lors,  $J_1 = J_2 = A$  et

$$\mathbf{J}_O = A \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + A \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \Gamma \mathbf{e} \mathbf{e} = A \mathbf{I} + (\Gamma - A) \mathbf{e} \mathbf{e}$$

où  $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e} \mathbf{e}$  est le tenseur identité.

- ii. Les forces appliquées à la toupie sont

- la force de pesanteur  $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_z$  appliquée au centre d'inertie de la toupie ;
- la réaction  $\mathbf{R}$  appliquée au point O.



*Justification (symétrie) : 1 pt*  
*Forme de  $\mathbf{J}_O$  : 1 pt*

*Total i. : 2 pts*

Le théorème du moment cinétique s'écrit dès lors

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O = h\mathbf{e} \wedge (m\mathbf{g}) = -mghe \wedge \mathbf{E}_z$$

où  $\mathbf{E}_z$  est le vecteur unitaire dirigé verticalement vers le haut.

- iii. La projection du théorème du moment cinétique sur  $\mathbf{E}_z$  conduit à

$$\mathbf{E}_z \cdot \dot{\mathbf{H}}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{H}_O = H_z = \text{constante}$$

On obtient ainsi une première intégrale exprimant la conservation de la composante verticale du moment cinétique.

*Expression de  $\mathbf{M}_O$  : 1 pt*  
*Théorème II : 1 pt*  
*Total ii. : 2 pts*

*$H_z = C$  : 1 pt*

Par ailleurs, en multipliant le théorème du moment cinétique par  $\mathbf{e}$ , il vient

$$\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

Introduisant la dérivée relative par rapport aux axes liés au solide, il vient

$$\mathbf{e} \cdot \left[ \frac{\delta \mathbf{H}_O}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O \right] = 0$$

où

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = [A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}] \cdot \boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O = (\Gamma - A)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e})$$

$$\mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O) = 0$$

de sorte que, puisque  $\mathbf{e}$  est constant dans les axes liés à la toupie,

$$\mathbf{e} \cdot \left[ \frac{\delta \mathbf{H}_O}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_O \right] = \mathbf{e} \cdot \frac{\delta \mathbf{H}_O}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O) = 0$$

Dès lors,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \Gamma \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{constante}$$

Cette deuxième intégrale première exprime la conservation du spin  $n = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

iv. L'orientation de la toupie dans l'espace peut être décrite (voir figure ci-dessus) par la donnée des angles d'Euler :

- (a) l'angle de *nutation*  $\theta$  mesure l'inclinaison de l'axe  $\mathbf{e}$  par rapport à la verticale  $\mathbf{E}_z$  ;
- (b) l'angle de *précession*  $\phi$  mesure l'angle entre le plan formé par  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{E}_z$  et le plan formé par  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_z$  ;
- (c) l'angle de *rotation propre*  $\psi$  mesure la rotation de la toupie autour de l'axe  $\mathbf{e}$ .

Expression de  $\mathbf{H}_O$  utilisant la forme de  $\mathbf{J}_O$  et  $\boldsymbol{\omega}$  : 1 pt

Passage par la dérivée relative : 2 pts

Conservation du spin (ou de  $\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}$ ) : 1 pt

Total iii. : 5 pts

Pour chaque angle : nom, représentation et description du mouvement : 2 pts

Total iv : 6 pts.

v. Le vecteur de Poisson peut être exprimé en fonction des angles d'Euler sous la forme

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{E}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \dot{\theta} \frac{\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}}{\|\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}\|} = \dot{\phi}\mathbf{E}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta}(\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e})$$

Total v. : 3 pts

vi. En exploitant l'expression ci-dessus du vecteur de Poisson, la conservation du spin peut s'exprimer en fonction des angles d'Euler selon

Total vi. : 2 pts

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = n$$

TOTAL QI : 20 PTS

## Question II

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} = -\mu m r^{-6} \mathbf{e}_r$$

où  $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r\mathbf{e}_r$  est le vecteur position de P par rapport au centre de force O. En simplifiant par la masse  $m$ , on obtient

Total i. : 2 pts (avec ou sans simplification)

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\mu r^{-6} \mathbf{e}_r$$

ii. Multipliant cette équation vectoriellement par  $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r$ , on obtient

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

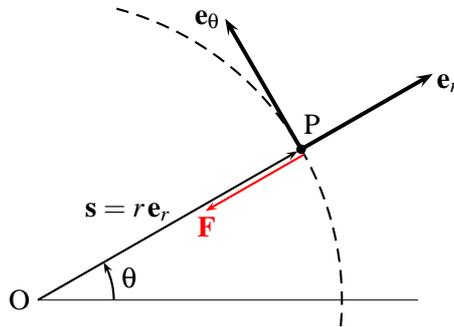
soit

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur constant  $\mathbf{h}$  comprenant le point O puisque, à tout instant,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = 0$$

iii. Le mouvement étant plan, on peut le décrire en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.



L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = -\mu r^{-6}\mathbf{e}_r$$

Projetant cette équation dans les directions radiale et tangentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\mu r^{-6} & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

De la seconde équation, on tire une première intégrale première qui exprime la conservation du moment cinétique (par unité de masse) et qui s'écrit

$$r^2\dot{\theta} = h$$

Les conditions initiales

$$\mathbf{s}_0 = r_0\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = v_0\mathbf{e}_\theta$$

permettent d'identifier les paramètres initiaux

$$\dot{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

et de déterminer la constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première de conservation du moment cinétique. On a

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0v_0 \quad (2)$$

*Développements pour établir l'intégrale première : 1 pt*

*Intégrale première : 1 pt*

*Interprétation géométrique : 2 pts*

*Total ii. : 4 pts*

*Introduction des coordonnées polaires : 2 pts, dont 1 pt pour la justification.*

*Intégrale première  $r^2\dot{\theta} = h$  : 2 pts*  
*Interprétation physique : 1 pt*

*$h = r_0v_0$  : 1 pt (ici ou au point iv)*

Éliminant  $\dot{\theta}$  de (1) en utilisant (2), on obtient

$$\ddot{r} - r_0^2 v_0^2 r^{-3} + \mu r^{-6} = 0$$

En multipliant par  $\dot{r}$  et en intégrant, il vient

$$\dot{r}^2 + r_0^2 v_0^2 r^{-2} - \frac{2\mu}{5} r^{-5} = C = v_0^2 - \frac{2\mu}{5} r_0^{-5} \quad (3)$$

où la constante a été déterminée en considérant les conditions initiales. Cette seconde intégrale première exprime la conservation de l'énergie (par unité de masse) de la particule.

iv. Le mouvement de la particule peut être étudié sur un diagramme de potentiel en se basant sur l'intégrale première (3) écrite sous la forme

$$\dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) = C = v_0^2 - \frac{2\mu}{5} r_0^{-5}$$

où

$$\mathcal{V}(r) = r_0^2 v_0^2 r^{-2} - \frac{2\mu}{5} r^{-5} = \frac{5r_0^2 v_0^2 r^3 - 2\mu}{5r^5}$$

Le graphique de  $\mathcal{V}$  peut être esquissé sur base de l'analyse de sa dérivée

$$\mathcal{V}'(r) = -2r_0^2 v_0^2 r^{-3} + 2\mu r^{-6} = 2 \left( \frac{-r_0^2 v_0^2 r^3 + \mu}{r^6} \right)$$

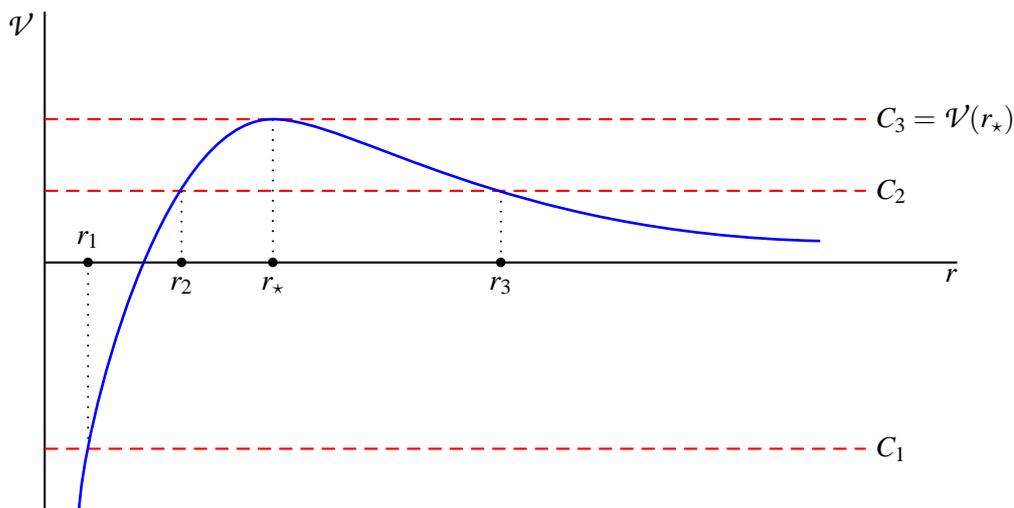
de l'identification du point stationnaire unique

$$r_* = \sqrt[3]{\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2}}$$

et des limites

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \mathcal{V}(r) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r) = 0^+$$

Le diagramme de potentiel possède l'allure suivante :



La condition initiale  $\dot{r}_0 = 0$  nous apprend que la particule se trouve initialement en un point de réflexion du diagramme de potentiel.

Trois cas peuvent se présenter suivant les valeurs prises par la constante  $C$ , c'est-à-dire par les conditions initiales  $r_0$  et  $v_0$ .

Intégrale première (3) : 5 pts (dont 3 pts pour le membre de gauche, 1 pt pour l'interp. physique et 1 pt pour la valeur de la constante donnée ici ou au point iv.)

Total iii. : 11 pts

Identification du potentiel  $\mathcal{V}$  : 1 pt

Valeur de  $r_*$  : 1 pt

Limites : 1 pt

Esquisse de  $\mathcal{V}$  : 2 pts

Cas  $C_1$  : 1 pt

Cas  $C_2$  : 2 pts (1 pt pour chacune des possibilités)

Cas  $C_3$  : 3 pts (1 pt pour la trajectoire circulaire, 1 pt pour la stabilité et 1 pt pour la vitesse constante)

- Si  $C \leq 0$ , par exemple si  $C = C_1$ , le point matériel, initialement situé en  $r_1$  est ensuite animé d'un mouvement borné à l'intérieur du cercle de rayon  $r_1$ .
- Si les conditions initiales sont telles que  $0 < C < \mathcal{V}(r_*)$ , par exemple si  $C = C_2$ , le point matériel a soit un mouvement borné à l'intérieur du cercle de rayon  $r_2$  s'il se trouve initialement en  $r_0 = r_2 < r_*$ , soit un mouvement non borné à l'extérieur du cercle de rayon  $r_3$  si  $r_0 = r_3 > r_*$ .
- Si  $r_0 = r_*$ , ce qui correspond au cas  $C = C_3 = \mathcal{V}(r_*)$  sur le diagramme de potentiel, le point décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r_*$  autour du centre de force. Cette trajectoire est instable. L'intégrale première (2) nous apprend que cette trajectoire est parcourue à vitesse angulaire constante.

On notera que le cas  $C > \mathcal{V}(r_*)$  ne peut se produire et ne doit donc pas être considéré puisque le point matériel se trouve initialement en un point de réflexion ( $\dot{r}_0 = 0$ ) et qu'il n'existe pas de tel point de réflexion si  $C > \mathcal{V}(r_*)$ .

v. Faisant usage du résultat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{r_0 v_0}{r^2}$$

dans (3), on obtient

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{r_0 v_0}{r^2}\right)^2 + r_0^2 v_0^2 r^{-2} - \frac{2\mu}{5} r^{-5} = v_0^2 - \frac{2\mu}{5} r_0^{-5}$$

ou encore

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) - \frac{2\mu}{5r_0^2 v_0^2 r} \left(1 - \frac{r^5}{r_0^5}\right) = 0$$

La trajectoire  $r(\theta)$  du point matériel vérifie donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{-r^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + \frac{2\mu}{5r_0^2 v_0^2 r} \left(1 - \frac{r^5}{r_0^5}\right)}$$

Retrait de maximum 3 pts si pas de prise en compte du fait que la position initiale est un point de réflexion (e.g. cas  $C > \mathcal{V}^*$  envisagé, ou autre dynamique que la trajectoire circulaire si  $C = C_3 = \mathcal{V}(r^*)$ ).

Total iv. : 11 pts

Changement de variable : 1 pt

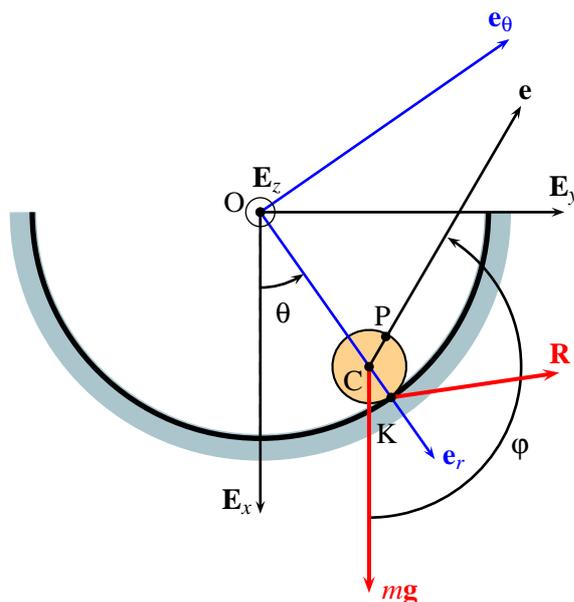
Équation différentielle correcte

sous une forme ou une autre : 1 pt

Total v. : 2 pts

TOTAL QII : 30 PTS

### Question III



Présence d'un dessin reprenant les éléments utilisés dans la résolution : 2 pts

Total dessin : 2 pts

- i. Le tube à essai est un solide en mouvement plan. Il possède donc au maximum 3 ddl. Le contact avec la cavité semi-circulaire et la condition de roulement sans glissement constituent deux liaisons de sorte que le tube à essai ne possède qu'un seul degré de liberté.

Nombre correct de ddl avec justifications : 1 pt  
Variables : 1 pt  
Total i. : 2 pts

Pour décrire son mouvement, on introduit l'angle  $\theta$  qui mesure la position du centre d'inertie par rapport à la verticale inférieure et l'angle  $\varphi$  qui mesure la rotation autour de son centre d'inertie (voir figure). Ces deux variables sont liées par la condition de roulement sans glissement.

- ii. Le roulement sans glissement se traduit par la condition

$$\dot{\mathbf{s}}_K^{\text{tube}} = \dot{\mathbf{s}}_K^{\text{cavité}} = \mathbf{0}$$

Annulation de la vitesse du tube en K : 1 pt

puisque la cavité semi-circulaire est fixe.

Le vecteur position d'un point matériel quelconque du pourtour du tube à essai est donné par

$$\mathbf{s}_P = (b - a)\mathbf{e}_r + a\mathbf{e}$$

et sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{s}}_P = (b - a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$  est le vecteur de Poisson du tube à essai. Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec la cavité semi-circulaire en K, on a

Relation entre coord. gén. : 1 pt

$$\dot{\mathbf{s}}_K = (b - a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_r = (b - a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_\theta$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement se traduit par la relation

Total ii. 2 pts

$$(b - a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0$$

- iii. Les forces agissant sur le tube à essai sont

Pesanteur : 2 pts dont 1 pt pour le caractère conservatif

- la force de pesanteur  $m\mathbf{g}$ , force conservative appliquée au centre d'inertie du tube à essai et dirigée verticalement vers le bas ;
- la force de liaison  $\mathbf{R} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$  appliquée en K et de direction inconnue dans le plan du mouvement.

Force de liaison : 2 pts dont 1 pt pour la direction inconnue ou la présence de deux composantes

- iv. Le moment central d'inertie est égal à la somme (intégrale) des produits des masses composant le solide et des carrés de leur distance à l'axe passant par le centre d'inertie.

Total iii. : 4 pts

Dans le cas du tube à essai, si on ignore le fond du tube et son épaisseur, toute la masse se trouve à la distance  $a$  de l'axe de symétrie de révolution passant par le centre d'inertie. Dès lors, la valeur du moment central d'inertie est proche de  $ma^2$ , ce qui est aussi le moment central d'inertie d'un cylindre creux.

Total iv. : 2 pts (1 pt si seulement référence à un cylindre creux)

- v. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}$$

Énoncé mathématique du théorème : 1 pt

soit

$$\dot{\mathbf{N}}_O = m\dot{\mathbf{s}}_C = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$\mathbf{N}_O$  ou  $\dot{\mathbf{N}}_O$  en fonction de  $\theta$  : 2 pts

où  $\mathbf{s}_C = (b - a)\mathbf{e}_r$  soit

Forces (pas forcément projetées) : 1 pt

$$m(b - a)\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - m(b - a)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = m\mathbf{g}\mathbf{E}_x + N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$$

Total v. : 4 pts

vi. L'application du théorème du moment cinétique dans un système d'axes centrés au centre d'inertie et parallèles à des axes inertiels conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

Énoncé mathématique  
du théorème : 1 pt

où

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{4}{5}ma^2\dot{\phi} \mathbf{E}_z$$

Expression de  $\mathbf{H}_C$  :  
1 pt

et

$$\mathbf{M}_C = a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} = a\mathbf{e}_r \wedge (N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta) = aT\mathbf{E}_z$$

Dès lors,

$$\frac{4ma^2}{5}\ddot{\phi} \mathbf{E}_z = aT\mathbf{E}_z$$

Expression de  $\mathbf{M}_C$  en  
fonction de  $\mathbf{R}$  : 1 pt

soit

$$\frac{4ma^2}{5}\ddot{\phi} = aT$$

Expression scalaire ou  
vectorielle du  
théorème : 1 pt

Total vi. : 4 pts

vii. Le théorème de l'énergie cinétique en O s'écrit

$$\dot{T}_O = P_O$$

Énoncé mathématique  
du théorème : 1 pt

où

$$P_O = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_K + mg \cdot \dot{\mathbf{s}}_C = mg \cdot \dot{\mathbf{s}}_C = -mg(b-a)\dot{\theta} \sin \theta$$

Expression de la  
puissance en fonction  
des forces en jeu : 1 pt

puisque  $\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0}$  en vertu de la condition de roulement sans glissement et que

$$\dot{\mathbf{s}}_C = (b-a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Expression  
du potentiel ou de la  
puissance de  $mg$  en  
fonction de  $\theta$  : 1 pt

On a aussi

$$\begin{aligned} T_O &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Expression  
de  $T_O$  en fonction des  
coord. gén. : 2 pts

Dès lors, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{5}ma^2\dot{\phi}^2 \right] = -mg(b-a)\dot{\theta} \sin \theta$$

Équation issue  
du théorème (sous une  
forme ou une autre) :  
1 pt

En utilisant la condition de roulement sans glissement, on peut éliminer la variable  $\phi$  et écrire

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{9}{10}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 \right] = -mg(b-a)\dot{\theta} \sin \theta$$

Élimination de  $\phi$  : 1 pt

ce qui conduit, après dérivation et simplification par  $\dot{\theta}$ , à l'équation du second ordre

Eq. du second ordre :  
1 pt

$$\frac{9}{5}(b-a)\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

ou encore

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{9(b-a)} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

qui est de la forme attendue avec

Identification de  $\beta$  :  
1 pt

$$\beta = \frac{5g}{9(b-a)}$$

Total vii. : 9 pts

viii. Dans le cas de petites oscillations,

$$\sin \theta \sim \theta, \quad (\theta \rightarrow 0)$$

La linéarisation de l'équation (4) conduit à

Linéarisation : 1 pt

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{9(b-a)} \theta = 0$$

Les petites oscillations sont donc décrites par

$$\theta(t) = A \cos \sqrt{\frac{5g}{9(b-a)}} t + B \sin \sqrt{\frac{5g}{9(b-a)}} t$$

où  $A = \theta_0$  et  $B = 0$  pour vérifier les conditions initiales  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Finalement, la loi du mouvement des petites oscillations s'écrit

Loi du mouvement avec constantes déterminées : 1 pt

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{5g}{9(b-a)}} t$$

qui décrit des oscillations d'amplitude  $\theta_0$  et de période

Période correcte : 1 pt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{9(b-a)}{5g}}$$

La période calculée est supérieure à celle du pendule simple de longueur  $\ell = b - a$  qui vaudrait

$T > T_\ell$  : 1 pt

$$T_\ell = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{b-a}{g}}$$

Cette différence s'explique par l'utilisation d'une partie de l'énergie pour assurer le mouvement de rotation du tube à essai autour de son centre d'inertie. L'énergie cinétique associée au mouvement du centre d'inertie est donc plus petite que celle du pendule simple lancé dans les mêmes conditions, de sorte que les oscillations du solide sont plus lentes.

Explication : 1 pt

Total viii. : 5 pts

ix. Le roulement sans glissement du tube à essai n'est possible que si les composantes tangentielle et normale de la force de liaison sont telles que  $|T| \leq \mu|N|$ , où  $\mu$  désigne le coefficient de frottement (statique) entre le tube à essai et la cavité semi-circulaire. Sous l'hypothèse des petites oscillations autour de  $\theta = 0$ , les projections du théorème de la quantité de mouvement sur  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  permettent d'exprimer  $N$  et  $T$  sous la forme

Condition : 1 pt.  
Précision "Statique" pas attendue.

$$\begin{cases} N = -mg \cos \theta - m(b-a)\dot{\theta}^2 \sim -mg \\ T = mg \sin \theta + m(b-a)\ddot{\theta} \sim mg\theta - \frac{5}{9}mg\theta = \frac{4}{9}mg\theta \end{cases}$$

Expressions de  $N$  et  $T$  (projections du théorème 1) : 1 pt  
Linéarisation : 2 pts

où a pris en compte la relation (4) pour exprimer  $\ddot{\theta}$ . La condition  $|T| \leq \mu|N|$  sera donc vérifiée pour autant que

Précision que  $\theta_0$  est la valeur maximale prise par  $\theta$  (oscillations d'amplitude  $\theta_0$ ) : 1 pt

$$|\theta(t)| \leq \frac{9\mu}{4}$$

au cours du mouvement du tube à essai dans la cavité semi-circulaire.

Le tube à essai présentant des oscillations d'amplitude  $\theta_0$ , la condition sera vérifiée à chaque instant si

Condition sur  $\theta_0$  : 1 pt  
Total ix. : 6 pts

$$\theta_0 \leq \frac{9\mu}{4}$$

TOTAL QIII : 40 PTS