LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2020

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez brièvement mais aussi complètement que possible (avec texte et, si nécessaire, expression mathématique et/ou dessin) les concepts suivants.
   (a) La poussée.
   (b) La précession uniforme d'une toupie.

ii. Établissez les équations d'Euler décrivant le mouvement d'un solide dans l'espace autour de son centre d'inertie. Donnez la signification de toutes les grandeurs intervenant dans ces équations.

Question II

On considère le mouvement d'un point matériel P de masse m soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale attractive

$$\mathbf{F} = -m\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$$

où μ désigne une constante strictement positive, r est la distance entre le point O et le point P et $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire porté par **OP**.

À l'instant initial, le point matériel est situé à une distance r_0 de O et est animé d'une vitesse $\mathbf{v}_0$ (non nulle) perpendiculaire à $\mathbf{e}_r$.

i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de P.

ii. Montrez que le mouvement du point matériel est plan.

iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires du mouvement ainsi que leur interprétation physique.

iv. Discutez la nature du mouvement sur un diagramme de potentiel en fonction des paramètres du problème.

Tournez la page.

Question III

On étudie le mouvement plan d'un pantin, assimilé à un solide indéformable de masse m, suspendu par le point O situé au sommet de sa tête (voir Figure 1).

Le moment central d'inertie J_C du pantin pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement est égal à $m\ell^2/3$ où ℓ désigne la distance entre le point O et le centre d'inertie C du pantin. On note θ l'angle que fait le pantin par rapport à la verticale inférieure.

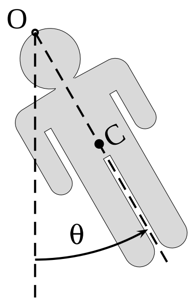


Figure 1

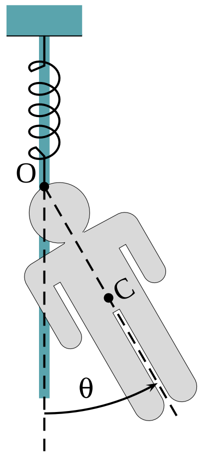


Figure 2

Dans une première configuration, le point O est fixe et le pantin oscille librement dans un plan vertical autour de ce point (voir Figure 1).

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du pantin. Justifiez.

ii. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur le pantin en précisant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique pour le pantin par rapport à un repère absolu.

iv. Déduisez-en la période des petites oscillations du pantin autour de la position verticale inférieure.

v. Comparez la période obtenue à celle d'un pendule simple de masse m et de longueur ℓ. Comment expliquez-vous la différence observée ?

Dans un deuxième temps, le pantin oscille toujours librement dans un plan vertical autour de son point de suspension O mais ce point O est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige verticale. De plus, le pantin est soumis à l'action d'un ressort vertical, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, dont une extrémité est fixée au point O du pantin et l'autre est attachée à l'extrémité de la tige verticale (voir Figure 2).

vi. Déterminez le nombre de degrés de liberté du pantin. Justifiez.

vii. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur le pantin en précisant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

viii. Écrivez* l'expression vectorielle du théorème de la quantité de mouvement.

ix. Écrivez* l'expression vectorielle du théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux.

x. À partir des équations obtenues ci-dessus, déterminez les configurations d'équilibre du pantin.

xi. Montrez que les mouvements de faible amplitude du pantin autour de la configuration d'équilibre dans laquelle C se trouve sous le point de suspension O peuvent être décrits comme la combinaison de deux oscillations indépendantes. Déterminez les fréquences de ces oscillations.

---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} = -m\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r\,\mathbf{e}_r$ est le vecteur position de P par rapport au centre de force O. En simplifiant par la masse m, on obtient

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$$

ii. Multipliant cette équation vectoriellement par $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r$, on obtient

$$\mathbf{s}\wedge\ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

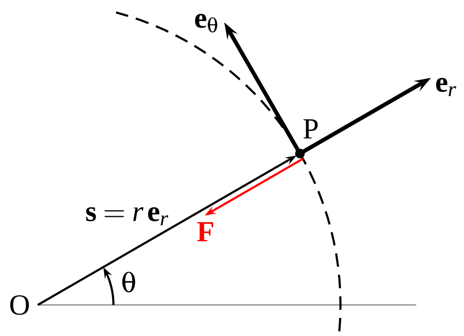
soit

$$\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h} = \mathbf{s}_0\wedge\mathbf{v}_0$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan de normale $\mathbf{h}$ formé par le vecteur position initial $\mathbf{s}_0$ et la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ puisque, à tout instant,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}}) = 0$$

iii. Le mouvement étant plan, on peut le décrire en utilisant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.



L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = -\mu r^{-2}\mathbf{e}_r$$

Projetant cette équation dans les directions radiale et tangentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\mu r^{-2} \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

On en tire directement une première intégrale première : $r^2\dot{\theta} = h$.
Les conditions initiales

$$\mathbf{s}_0 = r_0\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = v_0\,\mathbf{e}_\theta$$

soit

$$\dot{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

permettent de déterminer la constante. On a

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0 v_0 \tag{2}$$

Cette relation traduit la conservation du moment cinétique (par unité de masse).

Éliminant $\dot{\theta}$ de (1) en utilisant (2), on obtient

$$\ddot{r} - r_0^2 v_0^2\, r^{-3} + \mu r^{-2} = 0$$

et, après intégration temporelle,

$$\dot{r}^2 + r_0^2 v_0^2\, r^{-2} - 2\mu r^{-1} = C = v_0^2 - 2\mu r_0^{-1} \tag{3}$$

où la constante a été déterminée en considérant les conditions initiales. Cette seconde intégrale première exprime la conservation de l'énergie (par unité de masse) de la particule.

iv. Le mouvement de la particule peut être étudié sur un diagramme de potentiel en se basant sur l'intégrale première (3) écrite sous la forme

$$\dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) = C = v_0^2 - 2\mu r_0^{-1}$$

où

$$\mathcal{V}(r) = r_0^2 v_0^2\, r^{-2} - 2\mu r^{-1} = \frac{r_0^2 v_0^2 - 2\mu r}{r^2}$$

s'annule en $r_1 = r_0^2 v_0^2 / 2\mu$ et dont la dérivée

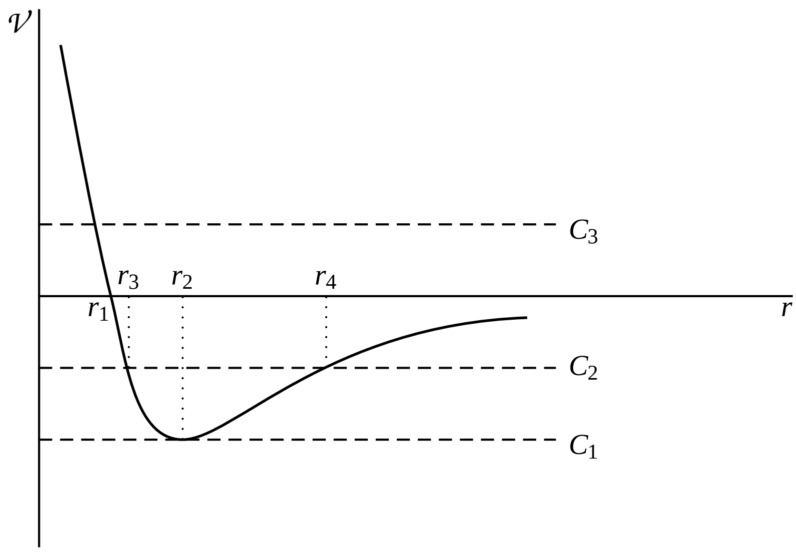
$$\mathcal{V}'(r) = -2 r_0^2 v_0^2\, r^{-3} + 2\mu r^{-2} = 2\left(\frac{-r_0^2 v_0^2 + \mu r}{r^3}\right)$$

s'annule en $r_2 = r_0^2 v_0^2 / \mu$.

On calcule aussi

$$\lim_{r\to 0^+} \mathcal{V}(r) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to +\infty} \mathcal{V}(r) = 0^-$$

ce qui permet de tracer le diagramme de potentiel suivant



La condition initiale $\dot{r}_0 = 0$ nous apprend que la particule se trouve initialement en un point de réflexion du diagramme de potentiel.

Trois cas peuvent se présenter suivant les valeurs prises par la constante C, c'est-à-dire par les conditions initiales r_0 et v_0.

- Si $C = C_1 = \mathcal{V}(r_2) = -\mu^2/(r_0^2 v_0^2)$, c'est-à-dire si $r_0 = r_2$, le point décrit une trajectoire circulaire de rayon r_0 autour du centre de force. L'intégrale première (2) nous apprend que cette trajectoire est parcourue à la vitesse angulaire constante v_0/r_0.
- Si les conditions initiales sont telles que $\mathcal{V}(r_2) < C_2 < 0$, le point matériel a un mouvement borné entre deux cercles de rayons r_3 et r_4.
- Si $C = C_3 \geq 0$, le point matériel a un mouvement non borné. Sa trajectoire est ouverte et il s'éloigne indéfiniment du centre de force.

Question III

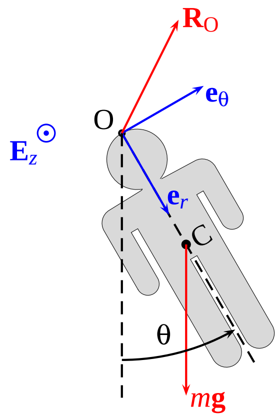


Figure 3

i. Le pantin est un solide en mouvement plan qui possède donc au maximum 3 degrés de liberté. Son point O étant fixe, seul le mouvement de rotation autour de O est permis. Il y a donc un seul degré de liberté qui peut être décrit par la coordonnée généralisée θ mesurant l'inclinaison du pantin par rapport à la verticale inférieure.

ii. Les forces extérieures agissant sur le pantin sont
   - $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur le pantin, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
   - $\mathbf{R}_\mathrm{O}$: force de liaison de direction inconnue agissant au point O dans le plan du mouvement.

iii. Le théorème de l'énergie cinétique dans les axes absolus en O s'écrit

$$\dot{T}_\mathrm{O} = \mathcal{P}_\mathrm{O} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} + \mathbf{R}_\mathrm{O} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{O} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C}$$

puisque le point O est fixe.
Le point O appartement au solide, l'énergie cinétique de celui-ci peut se calculer suivant

$$T_\mathrm{O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{J_\mathrm{O}\dot{\theta}^2}{2}$$

où $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z$ est le vecteur de Poisson du solide et J_O le moment d'inertie du solide pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement passant par O.
Le théorème de transport permet d'écrire

$$J_\mathrm{O} = J_\mathrm{C} + m\ell^2 = \frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2 = \frac{4m\ell^2}{3}$$

de sorte que

$$T_\mathrm{O} = \frac{2m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$$

Par ailleurs, on a (voir Figure 3)

$$\mathbf{s}_C = \ell \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}}_C = \ell \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

de sorte que

$$m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C = m\mathbf{g} \cdot \ell \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = -mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

Le théorème s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2\right) = -mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

soit

$$\frac{4m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

iv. Pour de petites oscillations ($\theta \to 0$) autour de la position verticale inférieure $\theta = 0$, on a $\sin\theta \sim \theta$ de sorte que l'équation du mouvement devient

$$\frac{4m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0$$

ou encore

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{4\ell}\theta = 0$$

La loi du mouvement pour de petites oscillations s'écrit donc

$$\theta(t) = A\cos\sqrt{\frac{3g}{4\ell}}t + B\sin\sqrt{\frac{3g}{4\ell}}t$$

où A et B sont des constantes.

Il s'agit d'un mouvement périodique de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g}}$$

v. La période du pendule simple de masse m et de longueur ℓ vaut $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Elle est inférieure à celle du pantin de masse m dont le centre d'inertie se trouve à la distance ℓ du point d'attache. Ceci est logique car le pantin est un solide qui utilise une partie de son énergie pour son mouvement de rotation autour de son centre d'inertie. Il a donc moins d'énergie disponible pour les oscillations du centre d'inertie autour du point O.

vi. Le point O peut se déplacer le long de la tige verticale. Son mouvement est par contre toujours bloqué dans la direction perpendiculaire à celle-ci. Le pantin possède donc 2 degrés de liberté représentés par les variables θ mesurant son inclinaison par rapport à la verticale inférieure et x mesurant le déplacement vertical de son point de suspension O à partir de la longueur naturelle du ressort. (voir Figure 4).

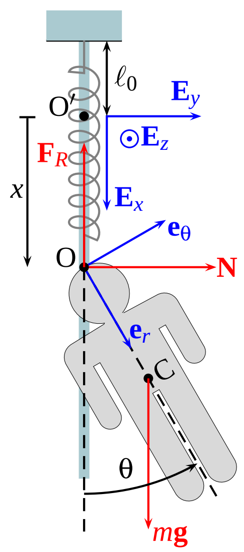


Figure 4

vii. Les forces extérieures agissant sur le pantin sont
- $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur le pantin, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{F}_R$: force appliquée par le ressort, conservative et qui, si x mesure l'élongation du ressort par rapport à sa longueur naturelle, s'exprime par $\mathbf{F}_R = -kx\mathbf{E}_x$;
- $\mathbf{N} = N\,\mathbf{E}_y$: force de liaison agissant au point de suspension O et dirigée, vu l'absence de frottement, perpendiculairement à la tige dans le plan du mouvement, c'est-à-dire dans la direction selon laquelle le mouvement du point O est empêché.

viii. Le théorème de la quantité de mouvement doit être rapporté à un système d'axes absolus. Choisissant un repère absolu centré en O′, point fixe situé à la longueur naturelle du ressort, on a

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}'} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_R + \mathbf{N}$$

où

$$\mathbf{N}_{\mathrm{O}'} = m\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = m\frac{d}{dt}(x\mathbf{E}_x + \ell\mathbf{e}_r) = m(\dot{x}\mathbf{E}_x + \ell\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$

soit

$$m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_R + \mathbf{N} \tag{4}$$

ix. Le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = -\ell\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{F}_R + \mathbf{N})$$

où

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = J_{\mathrm{C}}\dot{\theta}\mathbf{E}_z = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

Finalement,

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}\mathbf{E}_z = -\ell\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{F}_R + \mathbf{N}) \tag{5}$$

x. Les configurations d'équilibre sont celles pour lesquelles le pantin reste au repos s'il est abandonné sans vitesse. Elles peuvent donc être décrites par les équations d'équilibre statique obtenues en annulant les dérivées des résultantes cinématiques apparaissant dans les membres de gauche de (4) et (5), soit

$$\begin{cases} \mathbf{0} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_R + \mathbf{N} \\ \mathbf{0} = -\ell\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{F}_R + \mathbf{N}) \end{cases}$$

En projetant la première équation sur $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$, on obtient d'une part

$$\begin{cases} 0 = mg - kx \\ 0 = N \end{cases}$$

de sorte que $x = mg/k$ à l'équilibre.

Tenant compte de l'annulation de $\mathbf{N}$ à l'équilibre, l'équilibre en rotation conduit d'autre part à la relation

$$0 = \mathbf{E}_z \cdot (-\ell\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{F}_R) = k\ell x\,\mathbf{E}_z \cdot (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_x) = -k\ell x \sin\theta$$

de sorte que $\sin\theta = 0$ à l'équilibre.

Au final, le système possède donc deux configurations d'équilibre décrites par

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ x = \dfrac{mg}{k} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \theta = \pi \\ x = \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

xi. Dans le but d'étudier les mouvements de faible amplitude autour de la configuration d'équilibre ($\theta = 0$, $x = mg/k$) dans laquelle le point C se trouve exactement sous le point O, on établit d'abord deux équations scalaires pour x et θ ne faisant pas intervenir la réaction inconnue **N**.

Une première équation de ce type peut être obtenue en projetant le théorème de la quantité de mouvement (4) selon $\mathbf{E}_x$, soit

$$m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}(\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{E}_x) - m\ell\dot{\theta}^2(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_x) = mg - kx$$

ou encore

$$m\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta}\,\sin\theta - m\ell\dot{\theta}^2\,\cos\theta = mg - kx \tag{6}$$

Une seconde équation de ce type peut être obtenue en éliminant la réaction inconnue **N** de (5) au moyen de (4). On obtient

$$\begin{aligned}\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}\mathbf{E}_z &= -\ell\mathbf{e}_r \wedge (m\ddot{x}\mathbf{E}_x + m\ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - m\ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r - m\mathbf{g}) \\ &= m\ell\sin\theta\ddot{x}\mathbf{E}_z - m\ell^2\ddot{\theta}\mathbf{E}_z - mg\ell\sin\theta\mathbf{E}_z\end{aligned}$$

ou encore, en projetant dans la direction perpendiculaire au plan du mouvement,

$$\left(\frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2\right)\ddot{\theta} - m\ell\sin\theta\,\ddot{x} = -mg\ell\sin\theta \tag{7}$$

Introduisons ensuite les perturbations η et ε de la configuration d'équilibre étudiée selon

$$\theta = \eta \quad \text{et} \quad x = \frac{mg}{k} + \varepsilon$$

Les équations (7) et (6) décrivant l'évolution de petites perturbations de la configuration d'équilibre s'écrivent alors

$$\begin{cases}\left(\dfrac{m\ell^2}{3} + m\ell^2\right)\ddot{\eta} - m\ell\sin\eta\,\ddot{\varepsilon} = -mg\ell\sin\eta \\ \\ m\ddot{\varepsilon} - m\ell\sin\eta\,\ddot{\eta} - m\ell\cos\eta\,\dot{\eta}^2 = -k\varepsilon\end{cases}$$

En linéarisant ces équations et en considérant en particulier

$$\sin\eta \sim \eta \quad \text{et} \quad \cos\eta \sim 1, \quad (\eta \to 0),$$

on obtient

$$\begin{cases}\dfrac{4\ell}{3}\ddot{\eta} + g\eta = 0 \\ \\ m\ddot{\varepsilon} + k\varepsilon = 0\end{cases}$$

Il s'agit de deux équations découplées. La première correspond à des oscillations pendulaires autour de O à la pulsation $\omega_1 = 2\pi f_1 = \sqrt{3g/4\ell}$ et la seconde à des oscillations verticales autour de la position $x = mg/k$ à la pulsation $\omega_2 = 2\pi f_2 = \sqrt{k/m}$.