LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2018

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer la position d'un gyroscope dans l'espace et exprimez le vecteur de Poisson du gyroscope en fonction de ceux-ci.

ii. Établissez l'expression du couple extérieur à appliquer à un gyroscope pour produire un mouvement de précession uniforme autour de son centre d'inertie.

iii. Expliquez pourquoi l'axe de rotation de la Terre présente un mouvement de précession (période $T = 25\,760$ ans).

Question II

Le mouvement sans frottement d'un point matériel sur une circonférence située dans un plan vertical et tournant à vitesse constante autour de son diamètre vertical est décrit par l'intégrale première (en variables adimensionnelles)

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \cos^2\varphi - \alpha\sin\varphi = C$$

où $\varphi \in]-\pi,\pi]$ est une variable angulaire permettant de repérer la position du point sur la circonférence, τ désigne un temps rendu adimensionnel, C est une constante qui dépend des conditions initiales et $\alpha \geq 0$ est un paramètre du problème.

i. Déterminez les positions d'équilibre du système et discutez-en la stabilité.

ii. Pourquoi peut-on dire que le système présente une bifurcation ?

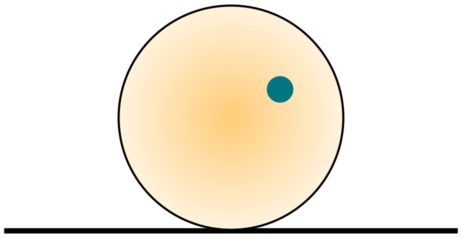
Tournez la page.

Question III

On se propose d'étudier le mouvement plan d'un solide de masse m constitué d'un disque homogène de rayon a et d'un balourd fixé de façon excentrée sur le disque (Cf. figure ci-dessous). Le solide roule sans glisser sur un plan horizontal fixe.

En raison de la présence du balourd, le centre d'inertie du solide se situe à une distance $h \leq a$ du centre du disque. Le moment central d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement est noté mb^2.

Alors que le balourd est situé sous le centre du disque, à l'aplomb de celui-ci, on communique au solide un mouvement de roulement sans glissement tel que le centre du disque acquiert une vitesse initiale horizontale v_0.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du solide (disque avec balourd). Justifiez.

ii. Écrivez la relation de roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal.

iii. Si la masse du disque homogène est de $3m/4$ et le balourd est situé à une distance $a/2$ du centre du disque, exprimez h et b en fonction de m et a.

   Si vous utilisez la valeur du moment d'inertie d'un solide de référence, montrez comment calculer celle-ci en repartant de la définition du tenseur ou du moment d'inertie.

   Dans la suite, n'utilisez pas les valeurs trouvées ici. Gardez h et b dans vos équations.

iv. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur le système en précisant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

v. Écrivez* l'expression vectorielle du théorème de la quantité de mouvement.

vi. Écrivez* l'expression scalaire du théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux.

vii. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertial.

viii. Montrez que le mouvement peut être étudié à partir d'une intégrale première du type

$$f(\theta)\dot{\theta}^2 - 2gh\cos\theta = C$$

   où θ est un angle repérant la position du balourd par rapport au centre du disque tel que $\theta = 0$ à l'instant initial et où $f(\theta)$ et C sont **à déterminer** et désignent respectivement une fonction strictement positive et une constante.

   Quelle est la signification physique de cette intégrale première ?

ix. Déterminez quelle doit être la vitesse initiale v_0 pour que le disque puisse rouler d'une distance d quelconque sur le plan (en supposant que les conditions du roulement sans glissement sont vérifiées à tout instant).

x. Déterminez quel doit être le coefficient de frottement μ entre le disque et le plan horizontal pour que le mouvement initial soit effectivement un roulement sans glissement.

---

* Explicitez chacune des résultantes cinématiques (pas leurs dérivées) et dynamiques intervenant dans ce théorème.

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. Les positions d'équilibre sont les points stationnaires de la fonction potentielle

$$V(\varphi) = -\cos^2\varphi - \alpha\sin\varphi$$

i.e. les solutions de

$$V'(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi - \alpha\cos\varphi = \cos\varphi(2\sin\varphi - \alpha) = 0$$

Il s'agit de $\varphi = \pi/2$, $\varphi = -\pi/2$ et des solutions de $\sin\varphi = \alpha/2$. Ces dernières n'existent que si $\alpha \leq 2$ et sont

$$\varphi = \arcsin\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \pi - \arcsin\frac{\alpha}{2}$$

qui coïncident avec $\varphi = \pi/2$ si $\alpha = 2$.

En résumé, les positions d'équilibre sont

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq \alpha < 2 & : \ -\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2},\ \arcsin\dfrac{\alpha}{2} \text{ et } \pi - \arcsin\dfrac{\alpha}{2} \\ \text{si } \alpha \geq 2 & : \ -\dfrac{\pi}{2} \text{ et } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Afin de déterminer la nature de ces points stationnaires et donc des positions d'équilibre, on détermine la première dérivée du potentiel non nulle en ces points. On calcule

$$V''(\varphi) = -\sin\varphi(2\sin\varphi - \alpha) + 2\cos^2\varphi$$

puis

$$V''(\pi/2) = \alpha - 2 \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } \alpha > 2 & \Rightarrow \text{Min de } V \Rightarrow \text{stable} \\ < 0 \text{ si } \alpha < 2 & \Rightarrow \text{Max de } V \Rightarrow \text{instable} \\ = 0 \text{ si } \alpha = 2 & \Rightarrow \text{Pas de conclusion à ce stade} \end{cases}$$

$$V''(-\pi/2) = -\alpha - 2 < 0 \qquad \Rightarrow \text{Max de } V \Rightarrow \text{instable}$$

$$V''\left(\arcsin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\arcsin\frac{\alpha}{2}\right) \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } \alpha < 2 & \Rightarrow \text{Min de } V \Rightarrow \text{stable} \\ = 0 \text{ si } \alpha = 2 & \Rightarrow \text{Pas de conclusion à ce stade} \end{cases}$$

et

$$V''\left(\pi - \arcsin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\pi - \arcsin\frac{\alpha}{2}\right) \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } \alpha < 2 & \Rightarrow \text{Min de } V \Rightarrow \text{stable} \\ = 0 \text{ si } \alpha = 2 & \Rightarrow \text{Pas de conclusion à ce stade} \end{cases}$$

La nature de la position d'équilibre $\varphi = \pi/2$ quand $\alpha = 2$ demande de poursuivre la dérivation. Partant de

$$V''(\varphi) = -2\sin\varphi(\sin\varphi - 1) + 2\cos^2\varphi$$

on a successivement

$$V'''(\varphi) = 2\cos\varphi - 4\sin 2\varphi, \qquad V'''(\pi/2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Pas de conclusion à ce stade}$$

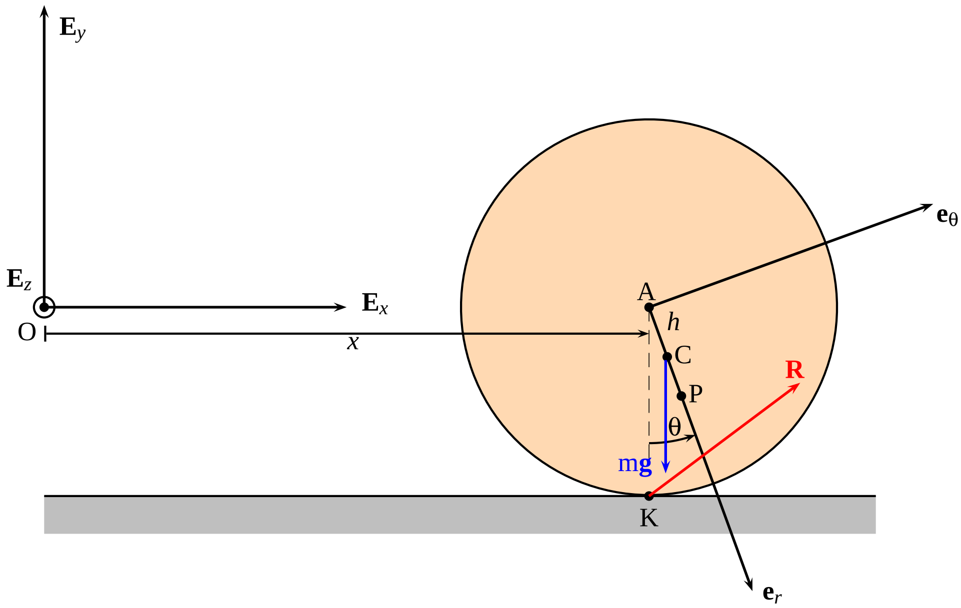
$$V^{(4)}(\varphi) = -2\sin\varphi - 8\cos 2\varphi, \quad V^{(4)}(\pi/2) = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Min de } V \Rightarrow \text{stable}$$

En résumé,

	$\alpha < 2$	$\alpha \geq 2$
$-\pi/2$	Instable	Instable
$\arcsin\alpha/2$	Stable	-
$\pi/2$	Instable	Stable
$\pi - \arcsin\alpha/2$	Stable	-

ii. Il s'agit d'une bifurcation puisque le comportement du système change radicalement quand le paramètre α passe par la valeur 2. Il y a en effet apparition/disparition de deux positions d'équilibre et changement de la nature de la position d'équilibre $\varphi = \pi/2$.

Question III



i. Un solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Le mouvement sur le plan horizontal et la condition de roulement sans glissement imposent deux liaisons. Le solide a donc un seul degré de liberté.

ii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal fixe se traduit par l'égalité de leurs vitesses au niveau du point de contact K, soit

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \mathbf{0}$$

En prenant en compte le vecteur de Poisson $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$ du solide, la vitesse du point du solide en contact en K avec le plan horizontal est

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{K} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{AK} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (-a\mathbf{E}_y) = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{1}$$

iii. • *Détermination de la position du centre d'inertie du solide.*
Dans les axes liés au solide en A, le principe de superposition permet d'écrire

$$m\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{C} = \frac{3m}{4}\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{A} + \frac{m}{4}\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{P}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{C} = h\mathbf{e}_r$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{A} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{P} = a/2\,\mathbf{e}_r$, puisque le balourd P a une masse $m - 3m/4 = m/4$.
La projection de ce théorème sur l'axe $\mathbf{e}_r$ donne

$$mh = \frac{3m}{4}\cdot 0 + \frac{m}{4}\frac{a}{2}$$

soit

$$h = \frac{a}{8}$$

- *Détermination du moment d'inertie J_C du solide.*
  Par superposition,

$$J_C = mb^2 = J_C^{disque} + J_C^P$$

où

$$J_C^P = \frac{m}{4}\|\mathbf{CP}\|^2 = \frac{m}{4}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{8}\right)^2 = \frac{9ma^2}{256}$$

et, par le théorème de transfert,

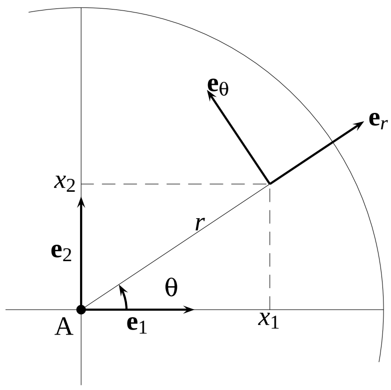
$$J_C^{disque} = J_A^{disque} + \frac{3m}{4}\|\mathbf{AC}\|^2 = J_A^{disque} + \frac{3m}{4}\frac{a^2}{64} = J_A^{disque} + \frac{3ma^2}{256}$$

Le moment d'inertie du disque par rapport à son centre d'inertie se calcule suivant

$$J_A^{disque} = \iint_{disque} (x_1^2 + x_2^2)\, \rho\, dx_1 dx_2$$

où la masse par unité de surface du disque vaut

$$\rho = \frac{3m/4}{\pi a^2}$$



et où l'intégrale peut être calculée en passant en coordonnées polaires (voir figure) suivant

$$\begin{aligned}\iint_{disque} (x_1^2 + x_2^2)\, \rho\, dx_1 dx_2 &= \frac{3m}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right] r\, dr \\ &= \frac{3m}{4\pi a^2} 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{3m}{2a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{3ma^2}{8}\end{aligned}$$

Finalement,

$$mb^2 = \frac{3ma^2}{8} + \frac{3ma^2}{256} + \frac{9ma^2}{256} = \frac{108ma^2}{256} = \frac{27ma^2}{64}$$

et

$$b = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$$

iv. Les forces extérieures agissant sur le solide sont
  - $m\mathbf{g}$: la force de pesanteur, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas ;
  - $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$: la force de liaison exercée par le plan horizontal sur le solide au point de contact K.

v. Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point O donne

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{N}_O = m\,\dot{\mathbf{s}}_C = m\frac{d}{dt}(x\mathbf{E}_x + h\mathbf{e}_r) = m(\dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$

Dès lors, le théorème s'écrit

$$m\frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{E}_x + h\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x \tag{2}$$

vi. Appliquant au solide étudié le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C, il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathrm{C}} = \mathbf{CC} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{CK} \wedge \mathbf{R} &= (-h\mathbf{e}_r - a\mathbf{E}_y) \wedge (N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x) \\
&= -hN(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_y) - hT(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}_x) - aT(\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{E}_x) \\
&= -hN \sin\theta \mathbf{E}_z - hT \cos\theta \mathbf{E}_z + aT\mathbf{E}_z
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = mb^2\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

soit

$$\frac{d}{dt}(mb^2\dot{\theta}\mathbf{E}_z) = -hN \sin\theta \mathbf{E}_z - hT \cos\theta \mathbf{E}_z + aT\mathbf{E}_z$$

ou encore, en projetant sur $\mathbf{E}_z$,

$$\frac{d}{dt}(mb^2\dot{\theta}) = -hN \sin\theta - hT \cos\theta + aT$$

vii. Le théorème de l'énergie cinétique rapporté à des axes inertiaux centrés en O, s'écrit

$$\frac{dT_{\mathrm{O}}}{dt} = \mathcal{P}_{\mathrm{O}} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}$$

vu la condition de roulement sans glissement et où

$$T_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 + T_{\mathrm{C}}$$

avec

$$\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 = \dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

et

$$T_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\, \dot{\theta}\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \dot{\theta}\mathbf{E}_z = \frac{1}{2}\, mb^2\dot{\theta}^2$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2)\right] = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = -mgh\dot{\theta}\sin\theta$$

viii. Après intégration temporelle du théorème de l'énergie cinétique, on obtient l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + b^2\dot{\theta}^2) - mgh\cos\theta = E$$

En tenant compte de la condition de roulement sans glissement (1), cette intégrale première peut être mise sous la forme

$$\dot{\theta}^2\left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\cos\theta\right) - 2gh\cos\theta = C$$

où la constante C est déterminée en utilisant les conditions initiales

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x} = -a\dot{\theta} = v_0 \quad \text{soit} \quad \dot{\theta}^2 = v_0^2/a^2$$

donc

$$C = \left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\right)\frac{v_0^2}{a^2} - 2gh = \left([a-h]^2 + b^2\right)\frac{v_0^2}{a^2} - 2gh$$

et où

$$f(\theta) = \left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\cos\theta\right) > 0$$

puisque

$$\left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\cos\theta\right) > (a-h)^2$$

Finalement, l'intégrale première s'écrit

$$\dot{\theta}^2\left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\cos\theta\right) - 2gh\cos\theta = \left([a-h]^2 + b^2\right)\frac{v_0^2}{a^2} - 2gh \tag{3}$$

ix. Le solide pourra rouler d'une distance d quelconque sur le plan horizontal si toutes les valeurs de l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ sont accessibles, c'est-à-dire, puisque $f(\theta) > 0$, si

$$-2gh\cos\theta < \left([a-h]^2 + b^2\right)\frac{v_0^2}{a^2} - 2gh, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi[$$

donc si

$$2gh < \left([a-h]^2 + b^2\right)\frac{v_0^2}{a^2} - 2gh$$

ou encore si

$$v_0^2 > \frac{4gha^2}{(a-h)^2 + b^2}$$

x. Le mouvement initial sera un roulement sans glissement si la prise en compte de cette hypothèse conduit à vérifier, à l'instant initial, la condition

$$|T| \leq \mu\,|N|$$

Le théorème de la quantité de mouvement (2) permet de déterminer l'expression des composantes de la force de liaison. On a

$$m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + h\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - h\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$$

soit, en projetant sur les axes absolus,

$$\begin{cases} T = m(\ddot{x} + h\ddot{\theta}\cos\theta - h\dot{\theta}^2\sin\theta) \\ N = m(g + h\ddot{\theta}\sin\theta + h\dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases}$$

À l'instant initial, $\theta = 0$ et $\dot{\theta}^2 = v_0^2/a^2$, ce qui donne, en prenant en compte le roulement sans glissement,

$$\begin{cases} T = m(\ddot{x} + h\ddot{\theta}) = m(h-a)\ddot{\theta} \\ N = mg + \dfrac{mhv_0^2}{a^2} \end{cases}$$

L'expression de $\ddot{\theta}$ peut être obtenue en dérivant (3) par rapport au temps. On obtient

$$\dot{\theta}^2\,(2ah\sin\theta) + 2\ddot{\theta}\left(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah\cos\theta\right) + 2gh\sin\theta = 0$$

donc, à l'instant initial,

$$2\ddot{\theta}(a^2 + h^2 + b^2 - 2ah) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \ddot{\theta} = 0$$

En $t = 0$, on a donc $T = 0$, ce qui assure que la condition $|T| \leq \mu|N|$ est toujours respectée. Quel que soit le coefficient de frottement μ, le mouvement commence par une phase de roulement sans glissement.