Université de Liège

Janvier 2017

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

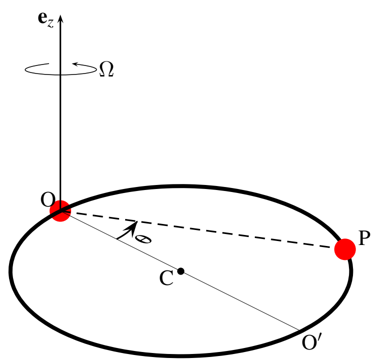
On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe $\mathbf{e}$ en mouvement autour de son sommet O fixe.

i. Exprimez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie en ne faisant apparaître d'autre vecteur que $\mathbf{e}$. Justifiez.

ii. Exprimez (vectoriellement) le théorème du moment cinétique rapporté à des axes fixes centrés en O.

iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires du théorème écrit en ii (sans introduire de coordonnées généralisées).

Question II



Une particule de masse m et de charge électrique q, assimilable à un point matériel P, se déplace sans frottement dans le champ de la pesanteur sur un rail circulaire de rayon a situé dans un plan horizontal. Le rail tourne à la vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe vertical passant par un de ses points noté O. Une particule de charge $-q$ est fixée à l'origine et exerce sur P une force

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r \qquad \text{où} \qquad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{OP}}{\|\mathbf{OP}\|}, \quad r = \|\mathbf{OP}\|, \quad \alpha^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Dans un système de coordonnées polaires centré en O, l'équation du rail est donnée par

$$r = 2a\cos\theta, \qquad \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

(voir dessin en perspective ci-dessus) où on a considéré que l'origine n'est pas accessible.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système et introduisez une(des) coordonnée(s) généralisée(s) (indépendantes) permettant de décrire le mouvement de la particule. Justifiez.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur la particule et citez-en les caractéristiques principales (direction, force appliquée/force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement.

iv. Exprimez l'équation différentielle vectorielle écrite au point précédent en fonction des vitesse et accélération relatives de la particule par rapport au rail.

v. Déterminez une intégrale première scalaire du mouvement en précisant son interprétation physique éventuelle.

vi. Montrez que l'intégrale première obtenue ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \cos^2\theta - \frac{2\beta^3}{\cos\theta} = \text{constante} \qquad \text{où} \qquad \tau = \Omega t \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{8ma^3\Omega^2}}$$

vii. En partant de sa définition, montrez que β est un nombre adimensionnel.

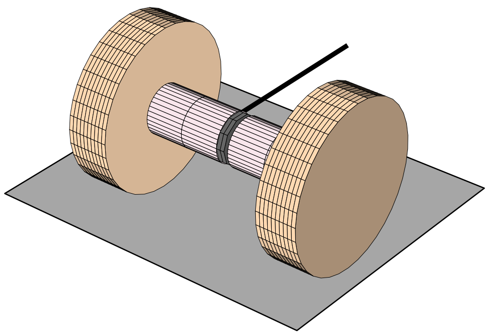
viii. En utilisant la méthode de votre choix, déterminez les éventuelles positions d'équilibre relatif de la particule par rapport au rail et discutez la stabilité de celles-ci en fonction du paramètre β.

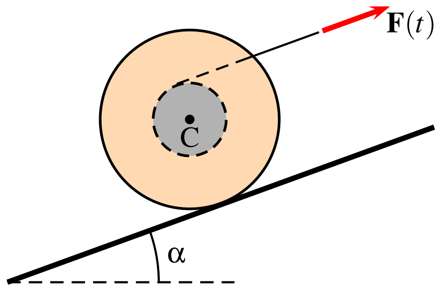
Question III

On considère un système constitué de deux roues identiques de rayon a reliées par un axe horizontal de rayon $b < a$ perpendiculaire aux deux roues en leur milieu. Le système roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Un corde inextensible et de masse négligeable est attachée à l'axe horizontal. Elle s'enroule et se déroule sans frottement autour de l'axe avec son extrémité libre située au-dessus de l'axe du système (voir dessin). Une force $\mathbf{F}(t)$ est appliquée en cette extrémité libre ; elle est dirigée vers le haut du plan incliné, parallèlement à celui-ci.

Le mouvement du système est étudié sous l'hypothèse du mouvement plan. Le contact entre les roues et le plan est supposé ponctuel et caractérisé par un coefficient de frottement μ. On note m la masse totale du système. Le centre d'inertie C du système est situé en son centre géométrique. On désigne par Γ le moment central d'inertie pour la rotation autour de l'axe horizontal reliant les deux roues.





i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système. Introduisez les coordonnées généralisées appropriées pour en décrire le mouvement.

ii. Déterminez la relation entre les coordonnées généralisées exprimant le roulement sans glissement des roues sur le plan.

iii. Relevez toutes les forces extérieures au système et précisez leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/force de liaison, force conservative).

iv. Écrivez[†] le théorème de la quantité de mouvement.

v. Écrivez[†] le théorème du moment cinétique rapporté à un système d'axes centrés en C.

vi. Déterminez l'intensité F_0 constante de la force $\mathbf{F}$ à appliquer à l'extrémité de la corde pour maintenir le système au repos sur le plan incliné.

vii. Déterminez la valeur maximale de l'inclinaison du plan incliné permettant de réaliser l'équilibre identifié en vi.

viii. Lorsque $F(t) = \|\mathbf{F}(t)\| > F_0$, déterminez l'accélération du centre d'inertie en fonction de F.

ix. Montrez qu'on peut communiquer un roulement sans glissement avec une accélération arbitrairement grande pour autant que

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \left(1 + \frac{ma^2}{\Gamma}\right)\mu$$

à condition de choisir judicieusement le rayon b de l'axe horizontal sur lequel s'enroule la corde.

[†] Explicitez chacune des résultantes cinématiques et dynamiques intervenant dans les théorèmes.

SOLUTION

Question I

i. Dans les axes principaux d'inertie de la toupie au point O, dont fait partie l'axe de symétrie de révolution $\mathbf{e}$, le tenseur d'inertie s'écrit

$$\mathbf{J}_\mathrm{O} = J_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + J_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{e}\mathbf{e}$$

où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont deux axes perpendiculaires à $\mathbf{e}$.
Vu la symétrie de révolution, le solide présente le même moment d'inertie pour la rotation autour de tout axe perpendiculaire à $\mathbf{e}$ et passant par le point O. Dès lors, $J_1 = J_2 = A$ et

$$\mathbf{J}_\mathrm{O} = A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{e}\mathbf{e} = A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}$$

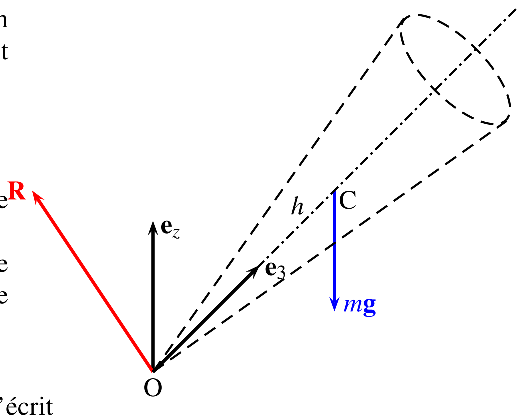
où $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}\mathbf{e}$ est le tenseur identité.

ii. D'une part, puisque la toupie est en rotation autour de son sommet O fixe, son moment cinétique par rapport à O est donné par

$$\mathbf{H}_\mathrm{O} = \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

D'autre part, les forces appliquées à la toupie sont

- la force de pesanteur, assimilable à une force unique $m\mathbf{g}$ appliquée au centre d'inertie de la toupie ;
- la réaction $\mathbf{R}$ appliquée au point O.



Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{O} = \mathbf{M}_\mathrm{O} = h\mathbf{e} \wedge (m\mathbf{g}) = -mgh\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_z$$

iii. La projection du théorème du moment cinétique sur $\mathbf{e}_z$ conduit à

$$\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{H}}_\mathrm{O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{H}_\mathrm{O} = H_z = \text{Constante}$$

On obtient ainsi une première intégrale première exprimant la conservation de la composante verticale du moment cinétique.
Par ailleurs, en multipliant le théorème du moment cinétique par $\mathbf{e}$, il vient

$$\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}}_\mathrm{O} = 0$$

Introduisant la dérivée relative par rapport aux axes liés au solide, il vient

$$\mathbf{e} \cdot \left[\frac{\delta \mathbf{H}_\mathrm{O}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_\mathrm{O}\right] = 0$$

où

$$\mathbf{H}_\mathrm{O} = \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \boldsymbol{\omega} = [A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}] \cdot \boldsymbol{\omega} = A\boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_\mathrm{O} = (\Gamma - A)(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e})$$

$$\mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_\mathrm{O}) = 0$$

de sorte que, puisque $\mathbf{e}$ est constant dans les axes liés à la toupie,

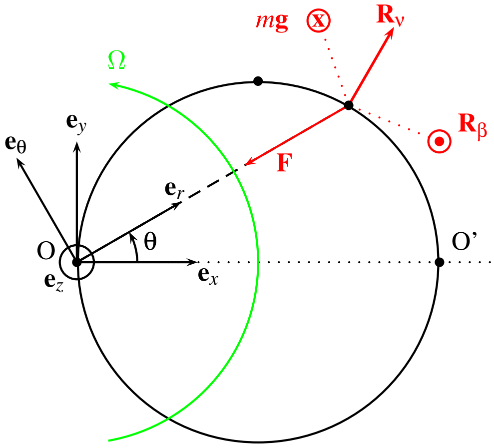
$$\mathbf{e} \cdot \frac{\delta \mathbf{H}_\mathrm{O}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_\mathrm{O}) = 0$$

Dès lors

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_\mathrm{O} = \Gamma\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{constante}$$

Cette deuxième intégrale première exprime la conservation du spin $n = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Question II



i. Le système étudié est un point matériel astreint à se déplacer sur un rail dont le mouvement est connu. Il est soumis à 2 liaisons et a donc un seul degré de liberté.

   Le mouvement de P peut être décrit par la seule coordonnée généralisée θ repérant sa position sur le rail, comme indiqué sur le dessin ci-contre.

   Repérant la position de la particule par rapport au point O, on note $\mathbf{s} = \mathbf{OP} = r\mathbf{e}_r$.

ii. Les forces appliquées sur la particule sont :
   - $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, conservative ;
   - $\mathbf{F} = -\dfrac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r$ force de Coulomb (électrostatique), conservative.

   La force de liaison normale se décompose en :
   - $\mathbf{R}_\nu$, force de liaison agissant selon la normale principale au rail ;
   - $\mathbf{R}_\beta = R_\beta\,\mathbf{e}_z$, force de liaison agissant selon la binormale au rail.

iii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement de la particule s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{e}_z - \frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z$$

iv. Introduisons la dérivée relative $\dfrac{\delta}{\delta t}$ par rapport aux axes $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ liés au rail en rotation à la vitesse angulaire Ω constante autour de $\mathbf{e}_z$. La formule de Poisson permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{s}$$

et donc

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{s}\right) + \Omega\mathbf{e}_z\wedge\left(\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{s}\right) = \frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega\mathbf{e}_z\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} + \Omega^2(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{s})\mathbf{e}_z - \Omega^2\mathbf{s}$$

où $\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{s} = 0$ puisque le rail est situé dans un plan horizontal.
L'équation différentielle du mouvement s'écrit donc

$$m\left[\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega\mathbf{e}_z\wedge\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} - \Omega^2\mathbf{s}\right] = -mg\mathbf{e}_z - \frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r + \mathbf{R}_\nu + R_\beta\mathbf{e}_z$$

v. Multipliant l'équation précédente scalairement par la vitesse relative, on obtient

$$m\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} - m\Omega^2\mathbf{s}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} = -\frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} \qquad (\diamondsuit)$$

où on a tenu compte du fait que la vitesse relative est tangente à la courbe et donc perpendiculaire à ses normales.
Le membre de gauche de cette équation peut s'écrire sous la forme

$$m\frac{\delta^2\mathbf{s}}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} - m\Omega^2\mathbf{s}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{1}{2}m\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2\right]$$

où

$$\mathbf{s} = r(\theta)\mathbf{e}_r = 2a\cos\theta\,\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \|\mathbf{s}\|^2 = 4a^2\cos^2\theta$$

$$\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = -2a\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{e}_r + 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 = 4a^2\dot{\theta}^2$$

de sorte que

$$\frac{1}{2}m\left\|\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2 - 2ma^2\Omega^2\cos^2\theta$$

Utilisant les mêmes variables, le membre de droite de ($\diamondsuit$) s'écrit sous la forme

$$-\frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}=-\frac{\alpha^2}{r^2}\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{r}\right)=\frac{\alpha^2}{2a}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

Remarquons que le membre de droite pouvait également s'écrire sous la forme

$$-\frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}=-\alpha^2\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^3}\cdot\frac{\delta\mathbf{s}}{\delta t}=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\alpha^2}{\|\mathbf{s}\|}\right)$$

ce qui conduit au même résultat.

Rassemblant les résultats précédents, l'équation ($\diamondsuit$) conduit donc à l'intégrale première

$$2ma^2\dot{\theta}^2-2ma^2\Omega^2\cos^2\theta-\frac{\alpha^2}{2a}\frac{1}{\cos\theta}=\text{constante}$$

Cette intégrale première ne représente pas la conservation de l'énergie ; la force de liaison $\mathbf{R}_\mathrm{v}$ développe une puissance non nulle au cours du mouvement.

vi. Introduisons la variable sans dimension $\tau=\Omega t$, on a

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}=\Omega\frac{d}{d\tau}$$

soit

$$2ma^2\Omega^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-2ma^2\Omega^2\cos^2\theta-\frac{\alpha^2}{2a}\frac{1}{\cos\theta}=\text{constante}$$

ou encore

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-\cos^2\theta-\frac{2\beta^3}{\cos\theta}=C \qquad (\heartsuit)$$

où

$$\beta=\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{8ma^3\Omega^2}}$$

vii. Afin de déterminer les dimensions de β, étudions d'abord celles de α^2. Puisque $\mathbf{F}$ représente une force, on a

$$[\mathbf{F}]=MLT^{-2}$$

de sorte que

$$MLT^{-2}=[\mathbf{F}]=\left[-\frac{\alpha^2}{r^2}\mathbf{e}_r\right]=\frac{[\alpha^2]}{L^2}\qquad\text{et}\qquad[\alpha^2]=ML^3T^{-2}$$

Dès lors,

$$[\beta]=\left[\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{8ma^3\Omega^2}}\right]=\sqrt[3]{\frac{ML^3T^{-2}}{ML^3T^{-2}}}=1$$

comme attendu.

viii. L'intégrale première ($\heartsuit$) peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2+\mathcal{V}(\theta)=C\qquad\text{où}\qquad\mathcal{V}(\theta)=-\cos^2\theta-\frac{2\beta^3}{\cos\theta}$$

Les éventuelles positions d'équilibre correspondent aux points stationnaires de $\mathcal{V}$, *i.e.* aux zéros de

$$\mathcal{V}'(\theta)=2\cos\theta\sin\theta-2\beta^3\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\left(\cos^3\theta-\beta^3\right)$$

soit

$$\{0,\ \pm\arccos\beta\}$$

Les positions d'équilibre $\pm\arccos\beta$ n'existent et ne doivent être considérées que pour $\beta\le 1$.
Remarquons que $\beta>0$, ce qui assure que $\pm\arccos\beta\in]-\pi/2,\pi/2[$ et donc que les deux positions d'équilibre $\theta=\pm\arccos\beta$ se trouvent sur le cercle.

Afin d'étudier la stabilité des positions d'équilibre, on calcule

$$\begin{aligned}\mathcal{V}''(\theta) &= 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - \frac{2\beta^3}{\cos\theta} - 4\beta^3\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\\ &= 4\cos^2\theta - 2 + \frac{2\beta^3}{\cos\theta} - \frac{4\beta^3}{\cos^3\theta}\end{aligned}$$

En $\theta = 0$, on a

$$\mathcal{V}''(0) = 2(1-\beta^3) = \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \beta < 1 \\ = 0 & \text{si} \quad \beta = 1 \\ < 0 & \text{si} \quad \beta > 1 \end{cases}$$

Dès lors, la position $\theta = 0$ correspond à un équilibre stable dans le cas où $\beta < 1$ (minimum de $\mathcal{V}$). L'équilibre est instable dans le cas où $\beta > 1$ (maximum de $\mathcal{V}$). Le cas $\beta = 1$ est étudié spécifiquement ci-dessous.

En $\theta = \pm\arccos\beta$, on a

$$\mathcal{V}''(\pm\arccos\beta) = 6(\beta^2 - 1) \leq 0$$

puisque cette configuration ne doit être considérée que pour les valeurs de $\beta \leq 1$. Pour $\beta < 1$, $\mathcal{V}$ présente un maximum local en ce point et l'équilibre est instable. Le cas $\beta = 1$ est étudié spécifiquement ci-dessous.

Dans le cas où $\beta = 1$, on a $\pm\arccos\beta = 0$. Le système ne possède donc qu'une seule position d'équilibre située en $\theta = 0$. Puisque $\mathcal{V}''(0) = 0$ dans ce cas, il est nécessaire d'examiner les dérivées d'ordre supérieur pour déterminer la stabilité. On calcule successivement

$$\mathcal{V}''(\theta) = 4\cos^2\theta - 2 + \frac{2}{\cos\theta} - \frac{4}{\cos^3\theta} \qquad \mathcal{V}''(0) = 0$$

$$\mathcal{V}'''(\theta) = -8\cos\theta\sin\theta + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{12\sin\theta}{\cos^4\theta} \qquad \mathcal{V}'''(0) = 0$$

$$\mathcal{V}''''(\theta) = 8(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \frac{2}{\cos\theta} + \frac{4\sin^2\theta}{\cos^3\theta} - \frac{12}{\cos^3\theta} - \frac{48\sin^2\theta}{\cos^5\theta} \qquad \mathcal{V}'''(0) = -18$$

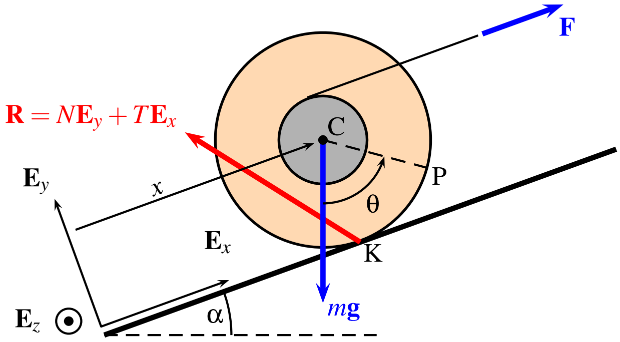
Puisque la première dérivée non nulle est d'ordre pair et négative, $\mathcal{V}$ présente un maximum local en $x = 0$. Il y correspond une position d'équilibre instable du point.

En résumé, on a donc

	$\beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
$\theta = 0$	Stable	Instable	Instable
$\theta = \pm\arccos\beta$	Instable	Instable	$\nexists$

Question III

i. Le solide est en mouvement plan et possède donc au maximum trois degrés de liberté.
Le contact entre le système et le plan incliné ainsi que la condition de roulement sans glissement introduisent deux contraintes cinématiques. Dès lors, le système possède un seul degré de liberté.
On introduit une coordonnée x pour décrire le mouvement du centre d'inertie du système et une coordonnée généralisée θ pour décrire le mouvement de rotation du solide autour de son centre d'inertie.



ii. Le roulement sans glissement se traduit par la condition

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Syst} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Plan}$$

où $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Syst}$ désigne la vitesse du point matériel du système qui est en contact en K avec le plan incliné et où $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Plan}$ est la vitesse du point matériel du plan incliné correspondant. Puisque le plan incliné est immobile, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Syst} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{Plan} = \mathbf{0}$$

La vitesse d'un point matériel quelconque du système étudié est donnée par

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP}$$

où $\mathbf{c}$ désigne le vecteur position du centre d'inertie. Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec le plan en K, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CK} = \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (-a\mathbf{E}_y) = (\dot{x} + a\dot{\theta})\mathbf{E}_x$$

de sorte que la condition de roulement sans glissement se traduit par la relation

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$$

iii. Les forces extérieures appliquées au système sont
- la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force extérieure conservative appliquée au centre d'inertie du système et dirigée verticalement vers le bas ;
- la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$ appliquée en K et de direction inconnue ;
- la force extérieure $\mathbf{F}(t)$ appliquée en l'extrémité de la corde et parallèle au plan incliné.

iv. L'application du théorème de la quantité de mouvement au système constitué des deux roues et de l'axe conduit à

$$m\ddot{x}\mathbf{E}_x = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}$$

Les projections sur les axes $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$ s'écrivent

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + F + T \qquad (\flat)$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N \qquad (\sharp)$$

v. L'application du théorème du moment cinétique dans un système d'axes centrés au centre d'inertie et parallèles à des axes inertiaux conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \Gamma\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

Dès lors,

$$\Gamma\ddot{\theta}\mathbf{E}_z = -a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R} + \boldsymbol{\sigma}_F \wedge \mathbf{F}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_F$ désigne le vecteur position du point d'application de la force $\mathbf{F}$ par rapport au centre d'inertie. La corde étant tangente au cercle de rayon b centré sur C, on a

$$\Gamma\ddot{\theta} = aT - bF \qquad (\natural)$$

vi. Au repos, les équations écrites ci-dessus deviennent

$$\begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha + F + T \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \\ 0 = aT - bF \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer la force

$$F_0 = \frac{mga\sin\alpha}{a+b}$$

à appliquer au bout de la corde pour maintenir le système en place.

vii. Les composantes de la réaction en K sont alors données par

$$\begin{cases} N_0 = mg\cos\alpha \\ T_0 = \dfrac{mgb\sin\alpha}{a+b} \end{cases}$$

Cette solution n'est acceptable que si $|T_0| \leq \mu|N_0|$, soit si

$$mgb\sin\alpha \leq \mu mg(a+b)\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leq \frac{a+b}{b}\mu$$

Cette inégalité définit l'inclinaison maximale du plan sur lequel le système peut être maintenu au repos en tirant sur la corde.

viii. Utilisant la relation de roulement sans glissement et les équations ($\flat$), ($\sharp$) et ($\natural$), il vient successivement

$$N = mg\cos\alpha$$

$$T = \frac{mg\Gamma\sin\alpha - (\Gamma - mab)F}{\Gamma + ma^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{Fa(a+b) - mga^2\sin\alpha}{\Gamma + ma^2}$$

On remarque que le système possède une accélération positive vers le haut du plan incliné ($\ddot{x} > 0$) si

$$F > F_0 = \frac{mga\sin\alpha}{a+b}$$

ix. Sans surprise, l'accélération croît avec la force $F > 0$ appliquée. Pour que celle-ci soit compatible avec le roulement sans glissement, il faut cependant que $|T| \leq \mu|N|$, ce qui limite F et l'accélération pouvant être communiquée au système. On remarque cependant que la composante tangentielle T de la réaction est indépendante de F si le rayon de l'axe autour duquel s'enroule la corde prend la valeur

$$b^\star = \frac{\Gamma}{ma}$$

Dans ce cas,

$$N = mg\cos\alpha$$

$$T = \frac{mg\Gamma\sin\alpha}{\Gamma + ma^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} - \frac{mga^2\sin\alpha}{\Gamma + ma^2}$$

Le système roule alors sans glisser si

$$\frac{mg\Gamma\sin\alpha}{\Gamma + ma^2} \leq \mu mg\cos\alpha$$

i.e. si

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leq \left(1 + \frac{ma^2}{\Gamma}\right)\mu$$