Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2016

MECA0003-1 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer la position d'un gyroscope dans l'espace et exprimez le vecteur de Poisson du gyroscope en fonction de ceux-ci.
ii. Quand dit-on qu'un gyroscope présente un mouvement de précession uniforme ?
iii. Établissez l'expression du couple extérieur à appliquer à un gyroscope pour produire un mouvement de précession uniforme autour de son centre d'inertie.

Question II

On considère le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace dans le champ de la pesanteur sur une surface de guidage fixe décrite en coordonnées cylindriques (avec $\mathbf{e}_z$ dirigé verticalement vers le haut) par l'équation

$$z = \frac{r^3}{p^2} \geq 0$$

où $p > 0$ est une constante. La liaison entre le point matériel et la surface de guidage est supposée sans frottement et bilatérale.

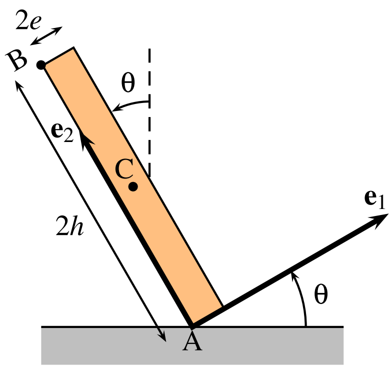
À l'instant initial, le point matériel est situé à une hauteur $z = z_0 > 0$ au-dessus du plan de référence et est animé d'un vitesse non nulle $\mathbf{v}_0$ horizontale.

i. Relevez toutes les forces agissant sur le point matériel en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel.
iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires et précisez-en les interprétations physiques éventuelles.
iv. Discutez la nature du mouvement en fonction des paramètres du problème.
v. Déterminez la vitesse minimale $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ à communiquer au point matériel pour que celui-ci s'élève sur la surface de guidage au-dessus de son niveau de départ z_0.

Tournez la page.

Question III

On étudie la chute d'un domino sous l'hypothèse du mouvement plan. Le domino est assimilé à un bloc parallélépipédique homogène de masse m, de hauteur $2h$, d'épaisseur $2e$ et de largeur ℓ. Il est initialement déposé sur un plan horizontal rugueux. On note μ le coefficient de frottement entre le domino et le plan horizontal.



Initialement, on écarte le domino d'un angle θ_0 par rapport à sa position verticale (voir figure pour la définition de l'angle θ) et on l'abandonne sans vitesse. Le domino pivote ensuite, sans glisser, autour de son point A en contact avec le plan horizontal.

i. Justifiez le fait que le domino ne possède qu'un seul degré de liberté associé à la coordonnée généralisée θ.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur le domino en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

iii. Montrez, en repartant de la définition des moments d'inertie, que le moment d'inertie du domino pour la rotation autour de A dans le plan du mouvement est donné par

$$J_A = \frac{4}{3}m(e^2 + h^2)$$

iv. Exprimez la vitesse et l'accélération absolues du centre d'inertie C dans les axes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ attachés au domino représentés ci-dessus.

v. Exprimez le moment cinétique du solide par rapport à un repère absolu.

vi. Exprimez l'énergie cinétique du solide par rapport à un repère absolu.

vii. Écrivez le théorème de la quantité de mouvement.

viii. Écrivez le théorème du moment cinétique par rapport à un repère absolu.

ix. Déterminez une intégrale première scalaire du mouvement et précisez son interprétation physique éventuelle.

x. Déterminez l'inclinaison critique $\theta_\star$ telle que le domino chute sur le plan si $\theta_0 > \theta_\star$.

xi. Dans le cas où $\theta_0 = \pi/6 > \theta_\star$, déterminez la vitesse du point B au moment de l'impact sur le plan horizontal.

xii. Dans le cas où $\theta_0 = \pi/6 > \theta_\star$, déterminez la condition sur les paramètres du problème pour que, au moins initialement, le domino pivote sans glisser autour de A.

Montrez que la condition fait apparaître une valeur limite du coefficient de frottement qui ne dépend que du rapport $\xi = e/h$ des dimensions du domino.

xiii. Par l'analyse dimensionnelle, justifiez, sans calcul, que la valeur limite du coefficient de frottement définie ci-dessus ne peut dépendre que de ξ.

Question I

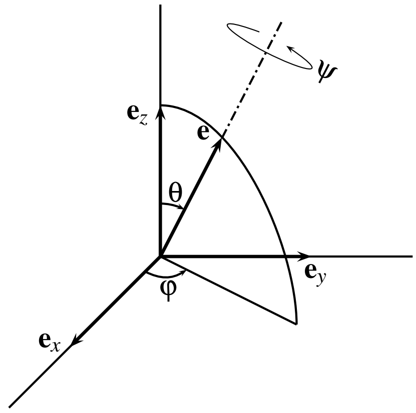
i. Soit $\mathbf{e}$ l'axe de symétrie de révolution du gyroscope et les vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ formant un repère d'orientation fixe.

L'orientation du gyroscope dans l'espace peut alors être décrite par la donnée des angles d'Euler suivants :

(a) l'angle de *nutation* θ mesure l'inclinaison de l'axe de référence $\mathbf{e}$ par rapport à la verticale $\mathbf{e}_z$;

(b) l'angle de *précession* φ mesure l'angle entre le plan formé par $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}_z$ et le plan formé par $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$;

(c) l'angle de *rotation propre* ψ mesure la rotation du solide autour de l'axe de référence $\mathbf{e}$.



Le vecteur de Poisson peut être exprimé en fonction des angles d'Euler sous la forme

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \mathbf{e}_z + \dot\psi \mathbf{e} + \dot\theta \frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}\|} \tag{1}$$

ii. On dit d'un gyroscope qu'il présente un mouvement de *précession uniforme* lorsque son axe de symétrie conserve une inclinaison constante par rapport à une direction fixe et tourne à vitesse angulaire constante autour de celle-ci. Dans ce mouvement, on a

$$\theta = \text{constante}, \qquad \dot\varphi = \text{constante} \qquad \text{et} \qquad \dot\psi = \text{constante} \tag{2}$$

iii. Dans le cadre de l'hypothèse (2) d'un mouvement de précession uniforme, on a

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \mathbf{e}_z + \dot\psi \mathbf{e} \tag{3}$$

où les vitesses angulaires $\dot\varphi$ et $\dot\psi$ sont constantes.

Le gyroscope présentant une symétrie de révolution d'axe $\mathbf{e}$, son tenseur central d'inertie peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{J}_\mathrm{C} = A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{ee} \tag{4}$$

où Γ et A sont, respectivement, les moments principaux d'inertie pour la rotation autour de $\mathbf{e}$ et autour de tout axe perpendiculaire à $\mathbf{e}$.

On calcule dès lors, en exploitant l'expression (3) du vecteur de Poisson écrite ci-dessus,

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = A\,\boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} = A\,\boldsymbol{\omega} + (\Gamma - A)(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\,\mathbf{e} \tag{5}$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} &= A\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\Gamma - A)(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\,\dot{\mathbf{e}} \\
&= A\,\dot\psi\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e} + (\Gamma - A)(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\,\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e} \\
&= \left[\Gamma\dot\psi + (\Gamma - A)\dot\varphi\cos\theta\right]\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e} \\
&= \dot\varphi\left[\Gamma\dot\psi + (\Gamma - A)\dot\varphi\cos\theta\right]\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{6}$$

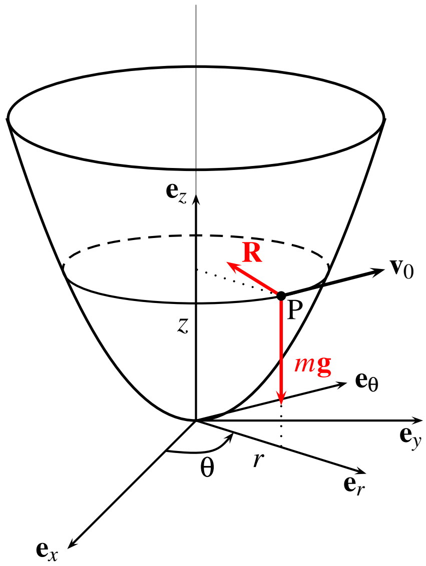
Appliquant le théorème du moment cinétique en C, on en déduit que, pour provoquer une précession uniforme, il convient d'appliquer un couple extérieur de moment

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = \dot\varphi\left[\Gamma\dot\psi + (\Gamma - A)\dot\varphi\cos\theta\right]\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e} \tag{7}$$

à la fois perpendiculaire à l'axe de symétrie du gyroscope et à l'axe autour duquel il précesse. Pour un gyroscope possédant une très grande vitesse de rotation propre, la vitesse de précession $\dot\varphi$ est faible par rapport à $\dot\psi$ de sorte que le moment des forces permettant d'assurer une précession uniforme est pratiquement donné par

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} \approx \Gamma\dot\varphi\,\mathbf{e}_z\wedge\dot\psi\,\mathbf{e} \tag{8}$$

Question II



i. Les forces agissant sur le point sont :

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative ;
- $\mathbf{R}$, force de liaison, perpendiculaire à la surface de guidage en l'absence de frottement.

La force de liaison normale n'a pas de composante tangentielle à la surface de guidage. Comme celle-ci est une surface de révolution autour de l'axe vertical, on a $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ en introduisant les axes de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \tag{9}$$

iii. Multipliant scalairement l'équation (9) par la vitesse absolue du point P, on obtient

$$m\ddot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

puisque la vitesse, tangente à la surface, et la force de liaison, normale à la surface, sont perpendiculaires. On en tire l'intégrale première

$$\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = E$$

exprimant la conservation de l'énergie du point P.

La constante E peut être déterminée en utilisant les conditions initiales. On a

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

En coordonnées cylindriques, l'intégrale première de conservation de l'énergie s'exprime sous la forme

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0 \tag{10}$$

Afin d'obtenir une seconde intégrale première, on utilise le fait que la réaction $\mathbf{R}$ ne possède pas de composante selon $\mathbf{e}_\theta$. La projection de l'équation (9) selon cet axe donne alors

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

soit

$$r^2\dot{\theta} = h$$

où h est une constante qui peut être déterminée en utilisant les conditions initiales.
La vitesse initiale s'écrit en coordonnées cylindriques, en toute généralité,

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta + \dot{z}_0\mathbf{e}_z$$

Initialement, la vitesse est horizontale ($\dot{z}_0 = 0$) et donc, puisque

$$z = \frac{r^3}{p^2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{z} = \frac{3r^2}{p^2}\dot{r} \tag{11}$$

on a aussi $\dot{r}_0 = 0$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_0 \qquad \Rightarrow \qquad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

Utilisant ce résultat, il vient

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0 v_0 \tag{12}$$

où $r_0 = \sqrt[3]{p^2 z_0}$.
Cette intégrale première exprime la conservation de la composante verticale du moment cinétique (par unité de masse). On peut en effet vérifier que

$$(\mathbf{s}\wedge\dot{\mathbf{s}})\cdot\mathbf{e}_z = \left[(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z)\wedge(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z)\right]\cdot\mathbf{e}_z = r^2\dot{\theta}$$

iv. L'équation de la surface de guidage (11) et l'équation (12) permettent d'éliminer les variables z et θ de l'équation (10). On obtient

$$\dot{r}^2\left(1 + \frac{9r^4}{p^4}\right) + \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2gr^3}{p^2} = v_0^2 + 2gz_0 \tag{13}$$

Puisque le coefficient multipliant $\dot{r}^2$ est strictement positif, le mouvement peut être étudié à partir du graphe de la fonction

$$\mathcal{V}(r) = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2gr^3}{p^2}$$

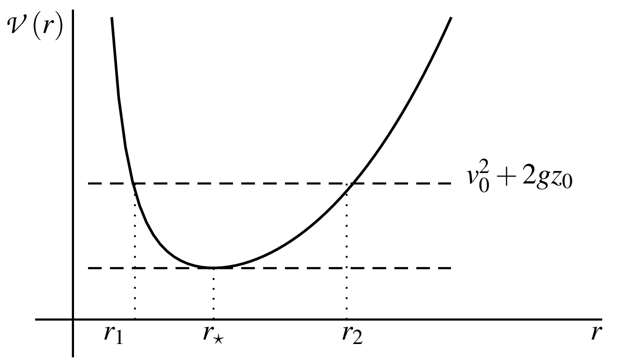
On calcule

$$\lim_{r\to+\infty}\mathcal{V}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0}\mathcal{V}(r) = +\infty$$

et

$$\mathcal{V}'(r) = \frac{-2r_0^2 v_0^2 p^2 + 6gr^5}{r^3 p^2} = 0 \quad \text{en} \quad r_\star = \sqrt[5]{\frac{r_0^2 v_0^2 p^2}{3g}}$$

Le 'diagramme de potentiel' présente donc l'allure suivante



- Dans le cas où $v_0^2 + 2gz_0 = \mathcal{V}(r_\star)$, la particule décrit une trajectoire circulaire à la hauteur constante $z_0 = r_\star^3/p^2$. En vertu de (12), cette trajectoire est décrite à la vitesse constante v_0.
- Dans le cas où $v_0^2 + 2gz_0 > \mathcal{V}(r_\star)$, la particule oscille entre deux plans horizontaux parallèles tout en tournant à vitesse variable sur la surface.

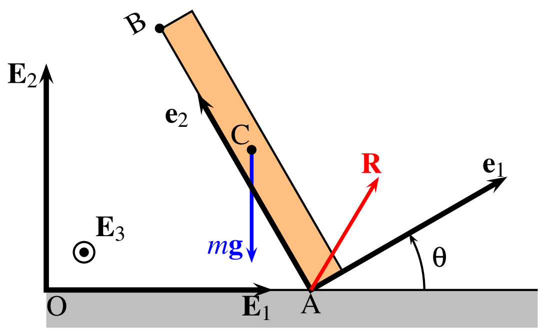
v. Pour que le point matériel s'élève sur la surface de guidage au-dessus de sont niveau de départ z_0, il faut que r_0 corresponde au point de réflexion r_1 du puits de potentiel illustré plus haut.
Ce sera le cas si

$$\mathcal{V}'(r_0) = \frac{-2r_0^2 v_0^2 p^2 + 6gr_0^5}{r_0^3 p^2} = \frac{-2v_0^2 p^2 + 6gr_0^3}{r_0 p^2} < 0$$

c'est-à-dire si

$$v_0^2 > \frac{3gr_0^3}{p^2} = 3gz_0$$

Question III



i. Un solide en mouvement plan possède au maximum trois degrés de liberté. Le point A étant fixe, le domino ne possède qu'un seul degré de liberté de rotation auquel on peut associer la variable angulaire θ.

ii. Les forces agissant sur le domino sont :

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_2$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative s'appliquant au centre d'inertie C ;
- $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_2 + T\mathbf{E}_1$, la force de liaison de direction (dans le plan du mouvement) et d'intensité inconnues s'appliquant au point fixe A du domino.

iii. Par définition, le moment d'inertie recherché est donné par

$$J_\mathrm{A} = \int_0^{2h} dy \int_0^{2e} \rho\ell(x^2+y^2)dx \tag{14}$$

où on a noté ℓ l'épaisseur du domino et ρ la masse par unité de volume, soit

$$\begin{aligned} J_\mathrm{A} &= \rho\ell \int_0^{2h} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_0^{2e} dy = \rho\ell \int_0^{2h} \left[\frac{8}{3}e^3 + 2ey^2\right] dy \\ &= \rho\ell \left[\frac{8}{3}e^3 y + \frac{2}{3}ey^3\right]_0^{2h} = \rho\ell\left[\frac{16}{3}e^3 h + \frac{16}{3}eh^3\right] = \frac{16}{3}\rho\ell eh(e^2+h^2) \end{aligned} \tag{15}$$

Puisque la masse du domino est donnée par $m = \rho\ell(2e)(2h) = 4\rho\ell eh$, il vient finalement

$$J_\mathrm{A} = \frac{4}{3}m(e^2+h^2) \tag{16}$$

comme annoncé.

iv. Le vecteur position du centre d'inertie C est donné par

$$\mathbf{c} = e\,\mathbf{e}_1 + h\,\mathbf{e}_2 \tag{17}$$

En dérivant, il vient successivement

$$\dot{\mathbf{c}} = e\,\dot{\theta}\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + h\,\dot{\theta}\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = e\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 - h\dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 \tag{18}$$

$$\ddot{\mathbf{c}} = (-h\ddot{\theta} - e\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_1 + (e\ddot{\theta} - h\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_2 \tag{19}$$

en tenant compte du fait que le vecteur de Poisson du domino et des axes $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ qui y sont attachés est

$$\omega = \dot{\theta}\mathbf{E}_3 \tag{20}$$

v. Le mouvement du solide se réduisant à une rotation à la vitesse $\dot{\theta}$ autour de son point fixe A, on a

$$\mathbf{H}_\mathrm{A} = J_\mathrm{A}\dot{\theta}\mathbf{E}_3 = \frac{4}{3}m(e^2 + h^2)\dot{\theta}\mathbf{E}_3 \tag{21}$$

vi. De même, on a

$$T_\mathrm{A} = \frac{1}{2}J_\mathrm{A}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}m(e^2 + h^2)\dot{\theta}^2 \tag{22}$$

vii. Tenant compte des forces appliquées, le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \tag{23}$$

viii. Le théorème du moment cinétique rapporté à des axes absolus centrés en A s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{A} = \mathbf{c} \wedge m\mathbf{g} + \mathbf{0} \wedge \mathbf{R} = (e\mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2) \wedge m\mathbf{g} \tag{24}$$

soit

$$J_\mathrm{A}\ddot{\theta} = -mge\cos\theta + mgh\sin\theta \tag{25}$$

ix. Le théorème de l'énergie cinétique rapport à des axes absolus centrés en A s'écrit

$$\dot{T}_\mathrm{A} = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{0} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{c}) \tag{26}$$

dont on tire l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$T_\mathrm{A} - m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{c} = E \tag{27}$$

où E représente l'énergie constante du système.
En utilisant (17) et (22), il vient

$$\frac{1}{2}J_\mathrm{A}\dot{\theta}^2 + mg(e\sin\theta + h\cos\theta) = E \tag{28}$$

Puisque le domino est initialement au repos et incliné d'un angle θ_0, on a

$$E = mg(e\sin\theta_0 + h\cos\theta_0) \tag{29}$$

Notons que l'intégrale première (28) peut également être obtenue en multipliant (25) par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps.

x. L'équation (25) montre que l'accélération angulaire initiale du domino sera positive, ce qui correspond à la chute de celui-ci sur le sol, si

$$J_\mathrm{A}\ddot{\theta}_0 = -mge\cos\theta_0 + mgh\sin\theta_0 > 0 \tag{30}$$

soit si

$$\mathrm{tg}\,\theta_0 > \frac{e}{h} \tag{31}$$

i.e. si

$$\theta_0 > \theta_\star = \mathrm{arctg}\,\frac{e}{h} \tag{32}$$

Si cette condition est vérifiée, l'équation (25) montre que l'accélération restera positive (le membre de droite est une fonction croissante de θ) au moins jusqu'en $\theta = \pi/2$, soit jusqu'à la chute complète du domino sur le sol.

xi. L'intégrale première (28) permet de calculer la vitesse angulaire à tout instant. En particulier, au moment de l'impact avec le sol, on a $\theta = \pi/2$ et (On note avec un indice i les grandeurs au moment de l'impact.)

$$\dot{\theta}_i^2 = 2\,\frac{E - mge}{J_\mathrm{A}} \tag{33}$$

où, injectant la valeur initiale $\theta_0 = \pi/6$ dans (29),

$$E = mg\left(e\sin\frac{\pi}{6} + h\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}mg\left(e + \sqrt{3}h\right) \tag{34}$$

Dès lors,

$$\dot{\theta}_i^2 = \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{3}h - e}{e^2 + h^2}\,g \tag{35}$$

Le sommet B du domino étant repéré par le vecteur position

$$\mathbf{s}_\mathrm{B} = 2h\mathbf{e}_2 \tag{36}$$

la vitesse du point B est donnée par

$$\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{B} = -2h\dot{\theta}\mathbf{e}_1 \tag{37}$$

Au moment de l'impact, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_2$ et la vitesse est donc

$$\mathbf{v}_\mathrm{B} = -2h\dot{\theta}_i\mathbf{E}_2 = -\sqrt{3gh}\,\sqrt{\frac{\sqrt{3} - e/h}{1 + e^2/h^2}}\,\mathbf{E}_2 \tag{38}$$

Remarquons que la condition $\pi/6 > \theta_\star$ assure que le terme sous la racine est strictement positif.

xii. Pour que le mouvement du domino soit bien un pivotement autour du point A sans que celui ne glisse sur le plan horizontal, il faut que

$$|T| \leq \mu|N| \tag{39}$$

Pour examiner la validité de cette condition en $t = 0$ et permettre ce type de mouvement au moins lors d'une phase initiale, déterminons les valeurs des deux composantes de la réaction à l'instant initial.

La réaction $\mathbf{R}$ peut être obtenue à partir de (23) où $\ddot{\mathbf{c}}$ est donné par (19). À l'instant initial, on a $\dot{\theta} = 0$ de sorte que

$$\ddot{\mathbf{c}}_0 = -h\ddot{\theta}_0\mathbf{e}_1 + e\ddot{\theta}_0\mathbf{e}_2 \tag{40}$$

En projetant (23) sur les direction $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, on obtient dès lors

$$T_0 = -m(h\cos\theta_0 + e\sin\theta_0)\ddot{\theta}_0 = -\frac{1}{2}m(\sqrt{3}h + e)\ddot{\theta}_0 \tag{41}$$

$$N_0 = mg + m(e\cos\theta_0 - h\sin\theta_0)\ddot{\theta}_0 = mg + \frac{1}{2}m(\sqrt{3}e - h)\ddot{\theta}_0 \tag{42}$$

où, par (25),

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{-mge\cos\theta_0 + mgh\sin\theta_0}{J_\mathrm{A}} = \frac{mg}{2J_\mathrm{A}}(-\sqrt{3}e + h) \tag{43}$$

Sous la condition $\theta_0 > \theta_\star$ considérée, on vérifie que $\ddot{\theta}_0$ est positif, comme attendu, et on observe que $T_0 < 0$. Par ailleurs, s'il y a contact en A, $N_0 > 0$.

Dès lors, le mouvement initial du domino sera effectivement un pivotement sans glissement si

$$\frac{m^2g}{4J_\mathrm{A}}(\sqrt{3}h + e)(-\sqrt{3}e + h) \leq \mu\left[mg + \frac{m^2g}{4J_\mathrm{A}}(-\sqrt{3}e + h)(\sqrt{3}e - h)\right] \tag{44}$$

soit si

$$3(\sqrt{3}h + e)(-\sqrt{3}e + h) \leq \mu\left[16(e^2 + h^2) - 3(h - \sqrt{3}e)^2\right] \tag{45}$$

Si on introduit le rapport $\xi = e/h$ dans cette expression, on obtient

$$\mu \geq \frac{3(\sqrt{3}+\xi)(1-\sqrt{3}\xi)}{16(\xi^2+1)-3(1-\sqrt{3}\xi)^2} \tag{46}$$

ce qui montre bien que la valeur minimale du coefficient de frottement ne dépend que du rapport $\xi = e/h$ des dimensions du domino.

xiii. Le fait que la valeur minimale du coefficient de frottement ne dépend que du rapport $\xi = e/h$ peut être justifié par l'analyse dimensionnelle.

En effet, la valeur minimale du coefficient de frottement, nombre sans dimension, ne peut dépendre que de groupements adimensionnels des paramètres du problème, sans quoi, cette valeur limite dépendrait des unités utilisées pour mesurer les paramètres.

Une analyse rapide montre que, pour un angle θ_0 fixé, le mouvement du domino ne peut dépendre que des paramètres suivants :

$$e, \qquad h, \qquad m \qquad \text{et} \qquad g \tag{47}$$

Notons que J_A n'est pas repris dans cette liste puisqu'il n'est pas indépendant de m, e et h et que l'épaisseur ℓ ne peut intervenir puisque le mouvement est plan.

Les quatre paramètres listés ci-dessus s'expriment en fonction de trois grandeurs de base : la longueur L, la masse M et le temps T. Par le théorème Π, on sait qu'on ne peut dès lors former qu'un seul produit adimensionnel. Le rapport des longueurs $\xi = e/h$ constitue donc le seul groupement adimensionnel qui puisse être formé et, partant, le seul paramètre dont puisse dépendre le coefficient de frottement minimum.