

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Durée de l'épreuve : 4h.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.

Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.

Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

- i. Déterminez l'expression du moment cinétique \mathbf{H}_C d'un solide indéformable en fonction de son vecteur de Poisson si \mathbf{H}_C est rapporté à un système d'axes centrés au centre d'inertie C et constamment parallèles à des axes inertiels.
Par rapport à quels autres points une relation semblable existe-t-elle entre le moment cinétique et le vecteur de Poisson d'un solide ?
- ii. À partir de la définition d'une force conservative, montrez que la puissance développée par une telle force peut s'exprimer comme l'opposé de la dérivée temporelle du potentiel.
- iii. Définissez brièvement mais aussi complètement que possible les termes suivants.
 - (a) Précession gyroscopique / effet gyroscopique.
 - (b) Équations d'Euler.
 - (c) Centre de percussion.

Question II

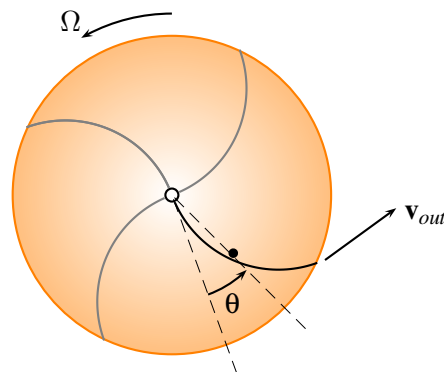
Un engin de salage des routes est construit sur le principe illustré ci-dessous. Le sel est déposé tout près du centre d'un plateau tournant de rayon a comportant des aubes qui permettent d'accélérer les grains de sel vers l'extérieur du dispositif.

On étudie le mouvement d'un grain de sel avant qu'il ne quitte le dispositif. Le grain de sel est assimilé à un point matériel de masse m

Le plateau est horizontal et tourne à la vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe vertical fixe passant par son centre. En coordonnées polaires, les aubes sont décrites par l'équation

$$r = \sqrt{2} a \sin \theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

On suppose que les grains de sel sont déposés sans vitesse relative par rapport au plateau à une distance $d_0 \neq 0$ du centre de celui-ci et glissent sans frottement sur le plateau et sur les aubes.



- i. Relevez toutes les forces agissant sur un grain de sel en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
- ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du grain de sel dans les axes liés au plateau tournant.
- iii. Déterminez une intégrale première scalaire et précisez son interprétation physique éventuelle. Justifiez.
- iv. Déterminez la vitesse absolue $\|\mathbf{v}_{out}\|$ du grain de sel au moment où il quitte le dispositif.
- v. Déterminez l'expression intégrale du temps de transit T d'un grain de sel depuis son dépôt sur le plateau jusqu'à son éjection. Pourquoi ne peut-on pas déposer le sel rigoureusement au centre du plateau ?

Question III

On lâche un casier de limonade et une bouteille du même liquide en haut d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les deux solides sont initialement sans vitesse. Le mouvement est plan.

I. - Mouvement du casier seul. On étudie d'abord le mouvement du casier en l'assimilant à un point matériel de masse $12m$ dont le glissement sur le plan incliné est caractérisé par le coefficient de frottement $\mu > 0$.

- i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du casier.
- ii. Déterminez l'inclinaison critique α_{cr} du plan telle que le casier reste au repos si $\alpha \leq \alpha_{cr}$.
- iii. Calculez la vitesse du casier en fonction du temps si $\alpha > \alpha_{cr}$.

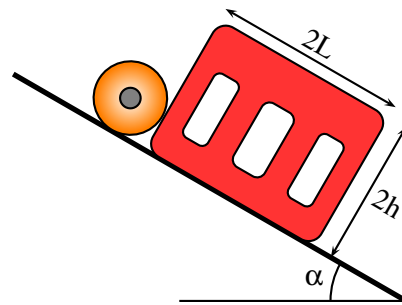
II. - Mouvement de la bouteille seule. On considère ensuite le mouvement de roulement sans glissement de la bouteille sur le plan incliné en assimilant celle-ci à un cylindre de rayon a et de masse m . Le moment d'inertie pour la rotation de la bouteille autour de son axe de symétrie de révolution est $ma^2/3$. Le coefficient de frottement entre le plan et la bouteille est μ .

- iv. Déterminez le nombre de degrés de liberté de la bouteille roulant sans glisser sur le plan incliné. Justifiez.
- v. Exprimez la condition de roulement sans glissement de la bouteille sur le plan incliné.
- vi. Relevez toutes les forces agissant sur la bouteille en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
- vii. Calculez la vitesse du centre d'inertie de la bouteille en fonction du temps.
- viii. Déterminez la valeur maximale α_{max} de l'inclinaison du plan compatible avec le roulement sans glissement de la bouteille sur le plan.

III. - Mouvement de la bouteille et du casier. On considère enfin simultanément la bouteille et le casier dans le cas où ils sont abandonnés sans vitesse l'un au-dessus de l'autre comme illustré ci-dessous pour $\alpha \in]\alpha_{cr}, \alpha_{max}[$. Dans ce cas, on peut déduire de I et II que la bouteille dévalerait la pente plus rapidement que le casier si elle était seule.

Le casier est maintenant assimilé à un parallélogramme rectangle homogène de masse $12m$, de longueur $2L$, de hauteur $2h$ et de largeur 2ℓ . La bouteille possède les mêmes caractéristiques qu'au point II.

On considère que les conditions sont telles que la bouteille roule sans glisser sur le plan et glisse (avec frottement) sur le casier. Les coefficients de frottement entre le plan et la bouteille, entre le plan et le casier et entre la bouteille et le casier prennent la valeur commune μ .



- ix. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système constitué de la bouteille et du casier. Justifiez.
- x. Relevez toutes les forces agissant sur la bouteille et sur le casier en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative, force interne/externe).
- xi. Écrivez le théorème de la quantité de mouvement pour le système constitué de la bouteille et du casier.
- xii. Écrivez le théorème de l'énergie cinétique (dans des axes absolus) pour le système constitué de la bouteille et du casier.
- xiii. Écrivez un système d'équations contenant autant d'équations que d'inconnues et permettant de déterminer l'accélération commune des centres d'inertie de la bouteille et du casier en fonction du temps. Montrez, sans nécessairement la calculer, que celle-ci est constante.

SOLUTION

Question I

- i. Le moment cinétique rapporté à un système d'axes centrés au centre d'inertie d'un solide et constamment parallèles à des axes inertiels est donné par

$$\mathbf{H}_C = \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}_r \, dm$$

où \mathbf{r} et \mathbf{v}_r désignent respectivement le vecteur position et la vitesse par rapport au repère considéré.

Introduisant la dérivée relative par rapport à un système d'axes liés au solide et son vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$, on peut exprimer \mathbf{v}_r sous la forme

$$\mathbf{v}_r = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (1)$$

puisque la position relative d'un point quelconque du solide est constante dans les axes liés au solide.

Ceci permet d'écrire \mathbf{H}_C sous la forme,

$$\mathbf{H}_C = \int \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \, dm = \int [\boldsymbol{\omega} \|\mathbf{r}\|^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] \, dm$$

En introduisant le tenseur d'inertie en C

$$\mathbf{J}_C = \int [\|\mathbf{r}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}] \, dm$$

il vient finalement

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Une relation semblable $\mathbf{H}_B = \mathbf{J}_B \cdot \boldsymbol{\omega}$ peut être écrite par rapport à n'importe quel système d'axes par rapport auquel le champ des vitesses peut être décrit par (1), *i.e.* par rapport à tout système d'axes parallèles à des axes inertiels et centrés en un point B fixe par rapport au solide. Le mouvement du solide par rapport à un tel référentiel se réduit à un mouvement de rotation.

- ii. Une force \mathbf{F} est dite conservative si elle dérive d'un potentiel, *i.e.* si elle peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{s})$$

où V est une fonction de la position uniquement.

Adoptant un repère cartésien de vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, la puissance développée par une telle force est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{s}} &= - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (x\dot{\mathbf{e}}_x + y\dot{\mathbf{e}}_y + z\dot{\mathbf{e}}_z) \\ &= - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] \\ &= - \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

- iii. (a) La *précession gyroscopique* ou *effet gyroscopique* est le mouvement de précession que présente un solide de révolution en rotation rapide autour de son axe de symétrie lorsqu'il est sollicité par un couple extérieur \mathbf{C} indépendant de la vitesse de rotation. Au lieu de basculer dans la direction du couple appliqué, le solide acquiert un mouvement de rotation qui tend à aligner son axe de symétrie avec la direction du couple appliqué. Au premier ordre, la vitesse de précession $\dot{\phi} \mathbf{e}_z$ est telle que

$$\mathbf{C} = \Gamma \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \boldsymbol{\psi} \mathbf{e}$$

où Γ désigne le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de symétrie de révolution, \mathbf{e} est le vecteur unitaire porté par cet axe de symétrie et $\boldsymbol{\psi} \gg \dot{\phi}$ est la vitesse de rotation autour de cet axe.

- (b) Les équations d'Euler sont les équations scalaires obtenues en projetant sur les axes principaux d'inertie d'un solide le théorème du moment cinétique rapporté à des axes centrés au centre d'inertie (ou en un point fixe du solide) et constamment parallèles à des axes inertiels, *i.e.*

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

où $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et (M_1, M_2, M_3) désignent les composantes dans les axes principaux d'inertie du vecteur de Poisson et du moment des forces appliquées au solide et où J_1, J_2 et J_3 sont les moments principaux d'inertie.

- (c) Le centre de percussion d'un solide est le point auquel on peut appliquer des forces extérieures arbitrairement grandes, comme les forces impulsionnelles appliquées lors d'une percussion, sans provoquer de réaction aux appuis.

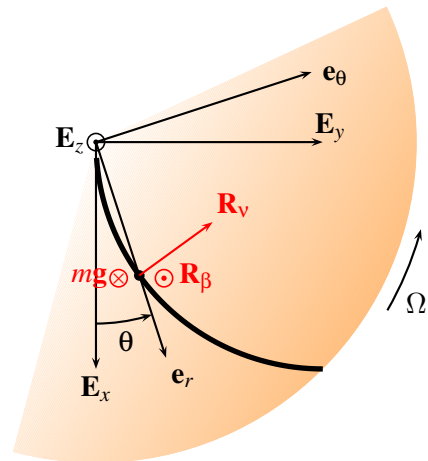
En frappant une boule de billard de rayon R en son centre de percussion, situé à une distance $2R/5$ au-dessus du centre d'inertie, on communique à la boule une vitesse de translation et une vitesse de rotation compatibles avec le roulement sans glissement sans qu'aucune force de frottement ne doive être mise en œuvre au point de contact avec le plan.

Dans le cas d'une raquette de tennis, le centre de percussion correspond au point du tamis où il convient de frapper la balle pour éviter de faire naître une force de réaction importante au niveau du poignet.

Question II

- i. Les forces agissant sur le point sont :

- $mg = -mg\mathbf{E}_z$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative (mais ne travaillant pas ici) ;
- \mathbf{R}_v , force de liaison agissant horizontalement, selon la normale principale à l'aube ;
- $\mathbf{R}_\beta = R_\beta \mathbf{E}_z$, force de liaison agissant verticalement, selon la normale au plateau.



- ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement de la particule s'écrit, dans les axes absolus,

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -mg\mathbf{E}_z + \mathbf{R}_v + R_\beta\mathbf{E}_z$$

où \mathbf{s} est le vecteur position de la particule par rapport au centre du plateau.

Introduisons la dérivée relative $\frac{\delta}{\delta t}$ par rapport aux axes $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ liés au plateau en rotation à la vitesse angulaire Ω constante autour de \mathbf{E}_z . La formule de Poisson permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{E}_z \wedge \mathbf{s}$$

et donc

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{E}_z \wedge \mathbf{s} \right) + \Omega \mathbf{E}_z \wedge \left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{E}_z \wedge \mathbf{s} \right) = \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega \mathbf{E}_z \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega^2 (\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E}_z - \Omega^2 \mathbf{s}$$

où $\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{s} = 0$ puisque le plateau est horizontal.

L'équation différentielle s'écrit donc, dans les axes liés au plateau,

$$m \left[\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\Omega \mathbf{E}_z \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} - \Omega^2 \mathbf{s} \right] = -mg\mathbf{E}_z + \mathbf{R}_v + R_\beta \mathbf{E}_z$$

iii. Multipliant l'équation précédente scalairement par la vitesse relative, on obtient

$$m \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} - m \Omega^2 \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \cdot \mathbf{s} = 0$$

puisque la vitesse relative est horizontale et tangente à l'aube.

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2} m \frac{\delta}{\delta t} \left[\left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\|^2 \right] - \frac{1}{2} m \Omega^2 \frac{\delta}{\delta t} \left[\|\mathbf{s}\|^2 \right] = 0$$

soit, après intégration temporelle,

$$\frac{1}{2} m \left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\|^2 - \frac{1}{2} m \Omega^2 \|\mathbf{s}\|^2 = \text{constante}$$

Bien que présentant les dimensions d'une énergie, cette intégrale première n'exprime pas la conservation de l'énergie ; l'énergie n'est pas conservée car la force de liaison \mathbf{R}_v développe une puissance non nulle au cours du mouvement.

La constante d'intégration apparaissant dans l'intégrale première ci-dessus peut être déterminée en utilisant les conditions initiales

$$\left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\| = 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{s}\| = d_0$$

Après simplification, on a alors

$$\left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\|^2 - \Omega^2 \|\mathbf{s}\|^2 = -\Omega^2 d_0^2 \quad (2)$$

En exprimant le vecteur position dans les axes de coordonnées polaires (voir dessin), on a

$$\mathbf{s} = r \mathbf{e}_r = \sqrt{2} a \sin \theta \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \|\mathbf{s}\|^2 = 2a^2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \sqrt{2} a \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_r + \sqrt{2} a \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} \right\|^2 = 2a^2 \dot{\theta}^2$$

soit, en remplaçant dans l'intégrale première (2),

$$2a^2 \dot{\theta}^2 - 2\Omega^2 a^2 \sin^2 \theta = -\Omega^2 d_0^2$$

ou encore

$$\dot{\theta}^2 - \Omega^2 \sin^2 \theta = -\Omega^2 \frac{d_0^2}{2a^2} \quad (3)$$

iv. La vitesse absolue du grain de sel se calcule en utilisant

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \Omega \mathbf{E}_z \wedge \mathbf{s}$$

soit

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega \mathbf{E}_z \wedge r \mathbf{e}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r(\dot{\theta} + \Omega) \mathbf{e}_\theta$$

Dès lors,

$$\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \dot{r}^2 + (\Omega + \dot{\theta})^2 r^2 = 2a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2a^2 \sin^2 \theta (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 + 2\dot{\theta}\Omega)$$

Au moment où le grain de sel quitte le dispositif, $\theta = \pi/4$ et (3) donne

$$\dot{\theta}^2 = \Omega^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \Omega^2 \frac{d_0^2}{2a^2} = \frac{\Omega^2}{2} \left(1 - \frac{d_0^2}{a^2} \right)$$

Introduisant ces valeurs de θ et $\dot{\theta}$ dans l'expression de la vitesse absolue, on obtient

$$\|\mathbf{v}_{out}\| = a\Omega \sqrt{2 - \frac{d_0^2}{a^2} + \sqrt{2 - \frac{2d_0^2}{a^2}}}$$

v. L'intégrale première (3) peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \Omega^2 \left(\sin^2 \theta - \frac{d_0^2}{2a^2}\right)$$

soit, puisque θ augmente lors du parcours du grain de sel sur l'aube,

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{d_0^2}{2a^2}}$$

Le temps de transit T recherché est donc donné par

$$T = \int_0^T dt = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\Omega \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{d_0^2}{2a^2}}} \quad \text{où} \quad \theta_0 = \arcsin\left(\frac{d_0}{\sqrt{2}a}\right)$$

Si le sel est déposé au centre du plateau, $d_0 = 0$ et le temps de transit devient

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\Omega \sin \theta}$$

Cette intégrale n'existe pas puisque, dans le voisinage de $\theta = 0$, $\sin \theta \sim \theta$ et que $1/\theta$ n'est pas intégrable sur $]0, \pi/4[$. Le temps de transit serait donc infini dans ce cas. De façon alternative, on peut justifier qu'il est inapproprié de déposer le sel rigoureusement au centre du plateau tournant en remarquant que ce point (correspondant à $\theta = 0$) est une position d'équilibre (instable).

Question III

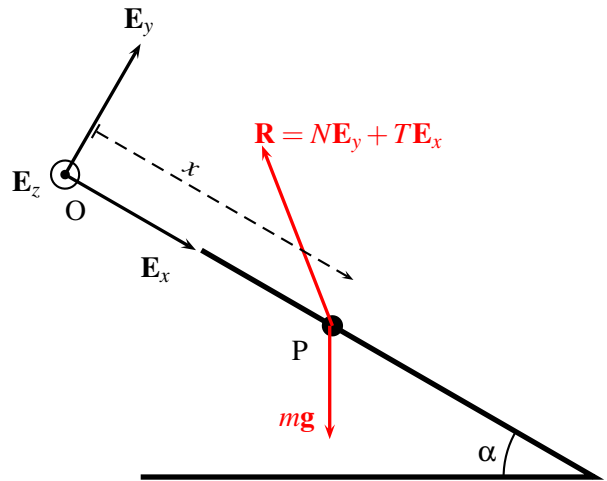
I. - Mouvement du casier seul.

i. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du casier s'écrit

$$12m\ddot{\mathbf{s}} = 12m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}$$

où $\mathbf{s} = x\mathbf{E}_x$ est le vecteur position du casier par rapport à l'origine des axes absolus choisis (voir dessin ci-contre) et où \mathbf{N} et \mathbf{T} sont, respectivement, les composantes normale et tangentielle de la force de liaison dans le plan du mouvement. Si on exprime les différents vecteurs dans les axes absolus, il vient

$$12m\ddot{x} \mathbf{E}_x = 12mg \sin \alpha \mathbf{E}_x - 12mg \cos \alpha \mathbf{E}_y + N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$$



ii. En projetant l'équation précédente sur \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , on obtient

$$12m\ddot{x} = 12mg \sin \alpha + T \tag{4}$$

$$N = 12mg \cos \alpha \tag{5}$$

Le casier reste au repos sur le plan incliné tant que $x=\text{constante}$ ($\ddot{x} = 0$) est une solution de (4)-(5) avec $|T| \leq \mu|N|$ c'est-à-dire

$$12mg \sin \alpha \leq \mu 12mg \cos \alpha \quad \text{soit} \quad \text{tg } \alpha \leq \mu$$

On a donc

$$\text{tg } \alpha_{cr} = \mu.$$

iii. Si $\alpha > \alpha_{cr}$, la loi du frottement s'écrit

$$T = -\mu N = -12\mu mg \cos \alpha$$

puisque la force de frottement s'oppose au mouvement du casier vers le bas du plan incliné. Introduisant cette valeur de T dans (4), on a

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$$

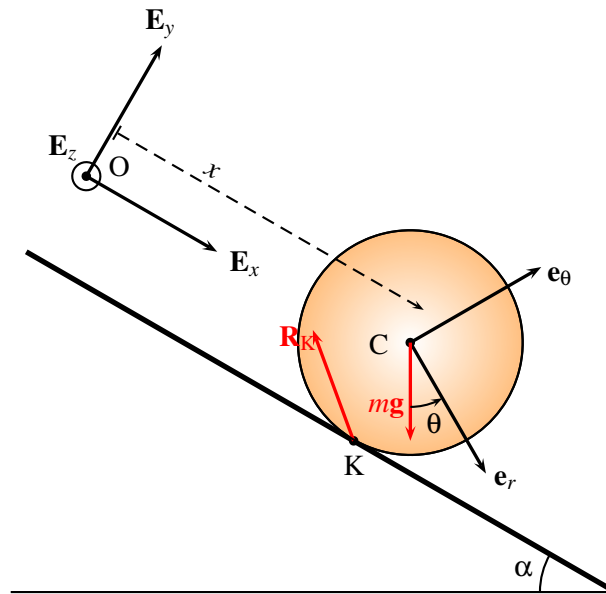
et donc

$$\dot{x} = (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) t$$

où on a tenu compte de la valeur nulle de la vitesse initiale du casier.

Remarquons que la condition $\alpha > \alpha_{cr}$, soit $\tan \alpha > \tan \alpha_{cr} = \mu$ assure que $\dot{x} \geq 0$ comme attendu.

II. - Mouvement de la bouteille seule.



- iv. La bouteille en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Elle est soumise à deux liaisons, son contact avec le plan incliné et le roulement sans glissement. Il ne lui reste donc qu'un seul degré de liberté.
- v. Le roulement sans glissement de la bouteille sur le plan incliné s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels de la bouteille et du plan en contact au point géométrique K à un instant donné, *i.e.*

$$\mathbf{s}_K^{bouteille} = \mathbf{s}_K^{plan} = \mathbf{0}$$

Introduisons la coordonnée x du centre d'inertie de la bouteille et l'angle θ mesurant la rotation de la bouteille autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement (voir dessin). Le vecteur de Poisson de la bouteille est $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{E}_z$ et la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\dot{x} \mathbf{E}_x + \dot{\theta} \mathbf{E}_z \wedge (-a \mathbf{E}_y) = \dot{x} \mathbf{E}_x + a \dot{\theta} \mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

soit

$$\dot{x} + a \dot{\theta} = 0 \quad (6)$$

vi. Les forces agissant sur la bouteille sont :

- mg , la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
- $\mathbf{R}_K = N_K \mathbf{E}_y + T_K \mathbf{E}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K .

vii. Appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la bouteille dans les axes absolus en O, il vient, puisque la force de pesanteur est conservative et que $\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0}$,

$$\dot{T}_O = P_O = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R}_K \cdot \dot{\mathbf{s}}_K = -\frac{dV_{mg}}{dt}$$

soit

$$T_O + V_{mg} = E$$

où

$$T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}m\dot{x}^2 \quad (7)$$

et

$$V_{mg} = -mgx \sin \alpha$$

L'intégrale première de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{2}{3}m\dot{x}^2 - mgx \sin \alpha = E$$

L'accélération du centre d'inertie de la bouteille peut être obtenue en dérivant cette intégrale première par rapport au temps. On obtient

$$\ddot{x} = \frac{3}{4}g \sin \alpha \quad (8)$$

Intégrant cette équation par rapport au temps, il vient

$$\dot{x} = \frac{3}{4}g \sin \alpha t$$

en tenant compte de la valeur nulle de la vitesse initiale de la bouteille.

viii. L'hypothèse du roulement sans glissement est valable si les composantes normale et tangentielle de la force de liaison \mathbf{R}_K sont telles que

$$|T_K| \leq \mu |N_K| \quad (9)$$

Pour déterminer la force de liaison, appliquons le théorème de la quantité de mouvement à la bouteille. Celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\mathbf{E}_x &= m\mathbf{g} + \mathbf{R}_K \\ &= mg \sin \alpha \mathbf{E}_x - mg \cos \alpha \mathbf{E}_y + N_K \mathbf{E}_y + T_K \mathbf{E}_x \end{aligned}$$

Projetant cette équation sur \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , il vient

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha + T_K \quad (10)$$

$$N_K = mg \cos \alpha \quad (11)$$

En combinant (8) et (10), on obtient

$$T_K = -\frac{1}{4}mg \sin \alpha$$

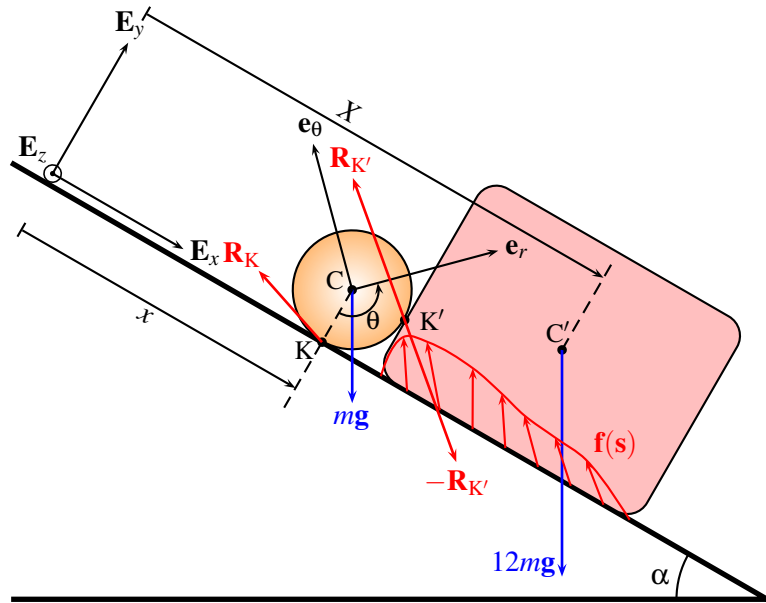
La condition (9) conduit dès lors à

$$|T_K| = \frac{1}{4}mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \quad \text{soit} \quad \text{tg } \alpha \leq 4\mu$$

de sorte que

$$\text{tg } \alpha_{max} = 4\mu$$

III. - Mouvement de la bouteille et du casier.



ix. Chacun des solides possède au maximum 3 degrés de liberté puisque le mouvement est plan. Le casier glisse sur le plan et ne possède donc qu'un seul degré de liberté représenté par la coordonnée X de son centre d'inertie C' .

La bouteille roule sur le plan incliné. Son mouvement peut donc être repéré par la coordonnée x de son centre d'inertie et l'angle θ de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du mouvement. Le roulement sans glissement de la bouteille sur le plan ($\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$) et le contact avec le casier en K' ($\dot{x} = \dot{X}$) imposent deux liaisons de sorte que la bouteille n'introduit pas de nouveau degré de liberté dans le système ; son mouvement est entièrement déterminé dès lors que celui du casier est connu.

Au total, le système possède donc un seul degré de liberté.

x. Les forces agissant sur la bouteille sont :

- mg , la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
- $\mathbf{R}_K = N_K \mathbf{E}_y + T_K \mathbf{E}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K ;
- $\mathbf{R}_{K'} = N_{K'} \mathbf{E}_x + T_{K'} \mathbf{E}_y$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K' .

Les forces agissant sur le casier sont :

- $12mg$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C' ;
- $-\mathbf{R}_{K'} = -N_{K'} \mathbf{E}_x - T_{K'} \mathbf{E}_y$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K' ;
- $\mathbf{f}(s)$: distribution surfacique de forces de liaison agissant sur la surface Σ du casier en contact avec le plan, de direction inconnue dans le plan du mouvement. Notons $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N \mathbf{E}_y + T \mathbf{E}_x$ la résultante de cette distribution.

Les forces $\pm \mathbf{R}_{K'}$ sont des forces internes au système constitué de la bouteille et du casier.

xi. Le théorème de la quantité de mouvement pour le système constitué de la bouteille et du casier s'écrit, dans les axes absolus en O ,

$$\dot{\mathbf{N}}_O = \mathbf{G}^{ext} = mg + 12mg + \mathbf{R}_K + \mathbf{R} = 13mg + \mathbf{R}_K + \mathbf{R}$$

où seules les forces externes interviennent dans la résultante.

La quantité de mouvement du système est donnée par

$$\mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O^{bouteille} + \mathbf{N}_O^{casier} = m\dot{\mathbf{s}}_C + 12m\dot{\mathbf{s}}_{C'} = m\dot{x}\mathbf{E}_x + 12m\dot{X}\mathbf{E}_x = 13m\dot{x}\mathbf{E}_x$$

puisque les centres d'inertie de la bouteille et du casier descendent à la même vitesse.

On a donc finalement

$$13m\ddot{x}\mathbf{E}_x = 13mg + \mathbf{R}_K + \mathbf{R}$$

En projetant cette équation respectivement sur \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , on obtient

$$13m\ddot{x} = 13mg \sin \alpha + T_K + T \quad (12)$$

$$N_K + N = 13mg \cos \alpha \quad (13)$$

- xii. Le théorème de l'énergie cinétique pour le système constitué de la bouteille et du casier s'écrit, dans les axes absolus en O,

$$\dot{T}_O = P_O^{ext+int} = mg \cdot \dot{\mathbf{s}}_C + 12mg \cdot \dot{\mathbf{s}}_{C'} + \mathbf{R}_K \cdot \dot{\mathbf{s}}_K + \mathbf{R}_{K'} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{bouteille} - \mathbf{R}_{K'} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{casier} + \int_{\Sigma} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{s}} d\Sigma$$

où les forces externes et internes contribuent à la puissance.

Réutilisant l'expression (7) de l'énergie cinétique de la bouteille et tenant compte du fait que les centres d'inertie de la bouteille et du casier sont animés de la même vitesse, *i.e.* $\dot{x} = \dot{X}$, l'énergie cinétique du système total peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned} T_O &= T_O^{bouteille} + T_O^{casier} \\ &= \frac{2}{3}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}12m\dot{X}^2 = \frac{20}{3}m\dot{x}^2 \end{aligned}$$

Les différentes vitesses apparaissant dans l'expression de la puissance sont données par

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_C &= \dot{x}\mathbf{E}_x \\ \dot{\mathbf{s}}_{C'} &= \dot{X}\mathbf{E}_x = \dot{x}\mathbf{E}_x \\ \dot{\mathbf{s}}_K &= \mathbf{0} \quad (\text{roulement sans glissement}) \\ \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{casier} &= \dot{X}\mathbf{E}_x = \dot{x}\mathbf{E}_x \\ \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{bouteille} &= \dot{x}\mathbf{E}_x + \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (a\mathbf{E}_x) = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_y \\ \dot{\mathbf{s}} &= \dot{X}\mathbf{E}_x = \dot{x}\mathbf{E}_x \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} P_O^{ext+int} &= mg \cdot \dot{x}\mathbf{E}_x + 12mg \cdot \dot{x}\mathbf{E}_x + \mathbf{R}_{K'} \cdot a\dot{\theta}\mathbf{E}_y + \dot{x}\mathbf{E}_x \cdot \int_{\Sigma} \mathbf{f}(\mathbf{s}) d\Sigma \\ &= 13mg\dot{x} \sin \alpha + a\dot{\theta}T_{K'} + \dot{x}\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{R} \\ &= 13mg\dot{x} \sin \alpha - \dot{x}T_{K'} + \dot{x}T \end{aligned}$$

Le théorème s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{20}{3}m\dot{x}^2 \right) = 13mg\dot{x} \sin \alpha - \dot{x}T_{K'} + \dot{x}T$$

soit

$$\frac{40}{3}m\ddot{x} = 13mg \sin \alpha - T_{K'} + T \quad (14)$$

- xiii. Écrivons le théorème de la quantité de mouvement pour le casier seul afin d'éliminer la force de liaison inconnue \mathbf{R}_K , *i.e.*

$$\dot{\mathbf{N}}_O^{casier} = 12m\dot{X}\mathbf{E}_x = 12m\ddot{x}\mathbf{E}_x = 12mg + \mathbf{R} - \mathbf{R}_{K'}$$

En projetant cette équation respectivement sur \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , on obtient

$$12m\ddot{x} = 12mg \sin \alpha + T - N_{K'} \quad (15)$$

$$0 = -12mg \cos \alpha + N - T_{K'} \quad (16)$$

Puisque que le casier glisse vers le bas ($\dot{x} > 0$) et repose sur le plan incliné ($N > 0$), la loi du frottement sur la base du casier s'écrit

$$T = -\mu N \quad (17)$$

La force de frottement s'exerçant sur le casier en K' est donnée par

$$-T_{K'}\mathbf{E}_y = -\mu |N_{K'}| \frac{\dot{\mathbf{s}}_{K'}^{gl}}{\|\dot{\mathbf{s}}_{K'}^{gl}\|}$$

où

$$\dot{\mathbf{s}}_{K'}^{gl} = \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{casier} - \dot{\mathbf{s}}_{K'}^{bouteille} = -a\dot{\theta}\mathbf{E}_y$$

D'une part, vu le caractère unilatéral de la liaison entre la bouteille et le casier on doit avoir $N_{K'} < 0$. D'autre part, puisque les deux solides glissent vers le bas ($\dot{x} > 0$, i.e. $\dot{\theta} < 0$), la loi du frottement entre la bouteille et le casier s'écrit

$$T_{K'} = -\mu N_{K'} \quad (18)$$

Les équations (14), (15), (16), (17) et (18), soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{40}{3}m\ddot{x} = 13mg \sin \alpha - T_{K'} + T \\ 12m\ddot{x} = 12mg \sin \alpha + T - N_{K'} \\ 0 = -12mg \cos \alpha + N - T_{K'} \\ T = -\mu N \\ T_{K'} = -\mu N_{K'} \end{array} \right.$$

constituent un système linéaire de 5 équations algébriques pour les 5 inconnues \ddot{x} , N , T , $N_{K'}$ et $T_{K'}$. L'accélération commune \ddot{x} des centres d'inertie de la bouteille et du casier est donc bien constante.

Remarquons qu'il est possible d'obtenir d'autres systèmes d'équations valables. Par exemple, on peut écrire 7 équations pour les 7 inconnues \ddot{x} , N , T , N_K , T_K , $N_{K'}$ et $T_{K'}$ en écrivant le théorème de la quantité de mouvement pour le système total, ce même théorème pour la bouteille seule, le théorème du moment cinétique en C pour la bouteille et les deux lois de frottement.

Écrivons le théorème de la quantité de mouvement pour la bouteille. Il vient

$$\dot{\mathbf{N}}_O^{bouteille} = m\ddot{x}\mathbf{E}_x = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_K + \mathbf{R}_{K'}$$

En projetant cette équation respectivement sur \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_y , on obtient

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha + T_K + N_{K'} \quad (19)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N_K + T_{K'} \quad (20)$$

Écrivons le théorème du moment cinétique pour la bouteille rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C. Il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= -a\mathbf{E}_y \wedge \mathbf{R}_K + a\mathbf{E}_x \wedge \mathbf{R}_{K'} \\ &= -a\mathbf{E}_y \wedge (N_K\mathbf{E}_y + T_K\mathbf{E}_x) + a\mathbf{E}_x \wedge (N_{K'}\mathbf{E}_x + T_{K'}\mathbf{E}_y) = aT_K\mathbf{E}_z + aT_{K'}\mathbf{E}_z \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{ma^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{E}_z = -\frac{ma}{3} \dot{x} \mathbf{E}_z$$

soit

$$\frac{1}{3} m \ddot{x} = -T_K - T_{K'} \quad (21)$$

Les équations (12), (13), (17), (18), (19), (20) et (21) constituent un système linéaire de 7 équations algébriques pour les 7 inconnues \ddot{x} , N , T , N_K , T_K , $N_{K'}$ et $T_{K'}$.