Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2019

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4h.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe $\mathbf{e}$ en mouvement autour de son sommet O fixe.

i. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer l'orientation de la toupie dans l'espace et exprimez le vecteur de Poisson de la toupie en fonction de ceux-ci.

ii. Exprimez et justifiez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie.

iii. Établissez l'expression de l'énergie cinétique absolue de la toupie en fonction des angles d'Euler.

Question II

La masse d'une boule de naphtaline varie par sublimation selon la loi

$$m = m_0 \exp(-\alpha t)$$

où α est une constante strictement positive.

On lance cette boule dans le champ de la pesanteur à partir d'un point fixe O avec une vitesse $\mathbf{v}_0$. On admet que le gaz émis par la sublimation possède une vitesse absolue nulle et que $\mathbf{g}$ est constant. On demande d'écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la boule de naphtaline et de déterminer la loi du mouvement.

Question III

Le mouvement d'une particule se déplaçant sans frottement sur un plan horizontal fixe dans le champ de la pesanteur et soumise à une force centrale attractive inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la distance au centre de force est régi par les intégrales premières suivantes, exprimées en coordonnées polaires dans le plan du mouvement,

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2\mu}{3a}}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\mu}{3r^3} = 0$$

i. Écrivez l'équation différentielle du premier ordre pour la trajectoire.

ii. Montrez que la trajectoire de la particule est donnée par

$$r = \beta(1+\cos\theta)$$

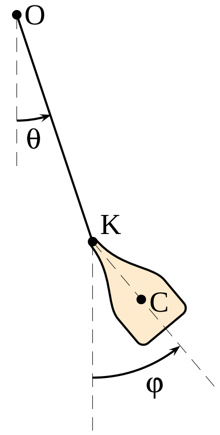
où β est une constante à déterminer.

Tournez la page.

Question IV

On étudie le mouvement plan d'un pendule constitué d'une bouteille attachée en K à l'extrémité d'une corde inextensible de masse négligeable dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O. On suppose que la corde reste tendue durant tout le mouvement.

La corde est de longueur $a = \|\mathbf{OK}\|$. Le centre d'inertie de la bouteille est situé à une distance $b = \|\mathbf{KC}\|$ du point d'attache. Le moment d'inertie de la bouteille pour la rotation autour d'un axe passant par son centre d'inertie et perpendiculaire au plan du mouvement est $mb^2/6$ où m désigne la masse de la bouteille.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté de la bouteille. Justifiez.

ii. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur la bouteille en précisant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

iii. Écrivez* l'expression vectorielle du théorème de la quantité de mouvement.

iv. Écrivez* l'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du solide et dont les axes sont parallèles à des axes inertiaux.

v. Exprimez l'énergie cinétique de la bouteille en fonction des variables du problème. L'énergie cinétique est-elle conservée au cours du mouvement ? Justifiez.

vi. À partir des équations écrites aux points iii. et iv., déterminez la(les) positions d'équilibre compatible(s) avec le fait que la corde soit tendue.

vii. Montrez que les petites oscillations de la bouteille autour de la position $\theta = 0$, $\varphi = 0$ sont caractérisées par la combinaison de deux mouvements harmoniques à des fréquences différentes. Le mouvement résultant est-il périodique ?

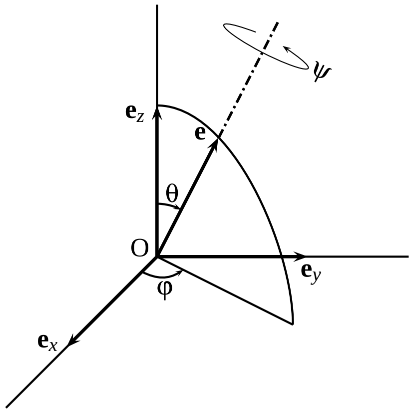
* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, chacune des résultantes cinématiques et dynamiques intervenant dans ce théorème.

Question I

Voir livre de référence.

Mettre en commentaires pour publier la solution.

i. Soit $\mathbf{e}$ l'axe de symétrie de révolution de la toupie et les vecteurs $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ formant un repère d'orientation fixe. L'orientation de la toupie dans l'espace peut alors être décrite par la donnée des angles d'Euler suivants :



(a) l'angle de *nutation* θ mesure l'inclinaison de l'axe de référence $\mathbf{e}$ par rapport à la verticale $\mathbf{e}_z$;

(b) l'angle de *précession* φ mesure l'angle entre le plan formé par $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}_z$ et le plan formé par $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$;

(c) l'angle de *rotation propre* ψ mesure la rotation de la toupie autour de l'axe $\mathbf{e}$.

Le vecteur de Poisson peut être exprimé en fonction des angles d'Euler sous la forme

$$\omega = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \dot{\theta}\frac{\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}\|} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}\mathbf{e} + \frac{\dot{\theta}}{\sin\theta}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e})$$

ii. Dans les axes principaux d'inertie de la toupie au point O, le tenseur d'inertie s'écrit

$$\mathbf{J}_\mathrm{O} = J_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + J_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{ee}$$

où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont deux axes perpendiculaires à l'axe de symétrie $\mathbf{e}$.

Vu la symétrie de révolution, le solide présente le même moment d'inertie pour la rotation autour de tout axe perpendiculaire à $\mathbf{e}$ et passant par le point O. Dès lors, $J_1 = J_2 = A$ et

$$\mathbf{J}_\mathrm{O} = A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \Gamma\mathbf{ee} = A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{ee}$$

où $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{ee}$ est le tenseur identité.

iii. La toupie étant en rotation autour de son sommet O fixe, son énergie cinétique peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned} T_\mathrm{O} &= \frac{1}{2}\omega\cdot\mathbf{J}_\mathrm{O}\cdot\omega = \frac{1}{2}\omega\cdot[A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{ee}]\cdot\omega \\ &= \frac{A}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}(\Gamma - A)(\omega\cdot\mathbf{e})^2 \\ &= \frac{A}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}(\Gamma - A)(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

Question II

L'équation différentielle décrivant le mouvement de la boule de naphtaline s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ désigne la poussée résultant de la variation de la masse de la boule et $\mathbf{s}$ le vecteur position du centre d'inertie de la boule par rapport au point fixe O.

Sachant que la masse de la boule varie selon la loi $m(t) = m_0 \exp(-\alpha t)$ et que la vitesse absolue des gaz émis est nulle ($\mathbf{w} = -\dot{\mathbf{s}}$), on calcule aisément

$$\mathcal{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w} = -\alpha m_0 \exp(-\alpha t)(-\dot{\mathbf{s}}) = \alpha m\dot{\mathbf{s}}$$

On a donc

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \alpha m\dot{\mathbf{s}}$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{s}} - \alpha\,\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène dont la solution générale peut être exprimée comme la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_h + \mathbf{s}_p$$

D'une part, le polynôme caractéristique de l'équation homogène s'écrit $z^2 - \alpha z = z(z-\alpha)$ et possède les deux zéros simples $z = 0$ et $z = \alpha$ de sorte que

$$\mathbf{s}_h = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$

où $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont des constantes.

D'autre part, on identifie facilement une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$\mathbf{s}_p = -\frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

de sorte que

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\,\mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

Les constantes peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$ et $\dot{\mathbf{s}}(0) = \mathbf{v}_0$, ce qui donne

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \alpha\mathbf{C}_2 - \frac{\mathbf{g}}{\alpha} = \mathbf{v}_0$$

et donc

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_2 = -\frac{\mathbf{v}_0}{\alpha} - \frac{\mathbf{g}}{\alpha^2}$$

Finalement, la loi du mouvement s'écrit

$$\mathbf{s} = \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\alpha} + \frac{\mathbf{g}}{\alpha^2}\right)(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1) - \frac{\mathbf{g}\,t}{\alpha}$$

Question III

i. En utilisant la valeur de $\dot{\theta}$ déduite de la première intégrale première, on peut écrire

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2\mu}{3a}}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

ce qui permet de transformer la deuxième intégrale première en

$$\frac{2\mu}{3a}\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{2\mu}{3a}\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu}{3r^3} = 0$$

soit

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 - ra = 0$$

qui est l'équation différentielle du premier ordre pour la trajectoire de la particule.

ii. Injectant l'équation donnée $r = \beta(1+\cos\theta)$ dans l'équation différentielle obtenue, on obtient

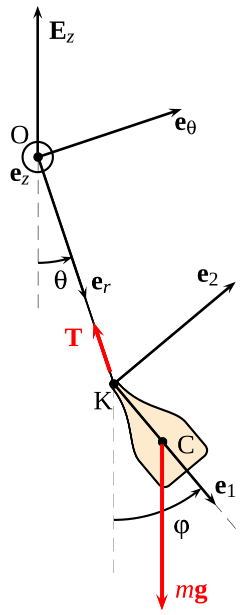
$$\beta^2\sin^2\theta + \beta^2(1+\cos\theta)^2 - \beta a(1+\cos\theta) = 0$$

ou encore

$$2\beta^2(1+\cos\theta) - \beta a(1+\cos\theta) = 0$$

qui est toujours vérifiée si $\beta = a/2$.

Question IV



i. Le mouvement est plan. la bouteille possède donc au maximum 3 degrés de liberté. La distance entre le point O et le point K étant fixée, il reste deux degrés de liberté pour la bouteille dont le mouvement est décrit par les angles θ, repérant le mouvement du point K, et φ, repérant le mouvement de la bouteille autour de K.

ii. Les forces extérieures agissant sur la bouteille sont
  - $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur la bouteille, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du solide et dirigée verticalement vers le bas;
  - $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_r$: la tension dans la corde, force de liaison agissant selon l'axe de la corde.

iii. Le théorème de la quantité de mouvement écrit au point O donne

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

avec

$$\mathbf{N}_\mathrm{O} = m\,\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = m\frac{d}{dt}(a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_1) = m(a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2)$$

où les axes $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ sont liés à la corde et les axes $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ à la bouteille (voir figure).
Dès lors, le théorème s'écrit

$$m(a\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + b\ddot{\varphi}\mathbf{e}_2 - b\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_1) = mg\cos\theta\,\mathbf{e}_r - mg\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta - T\mathbf{e}_r \qquad (1)$$

iv. Appliquant à la bouteille le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes absolus et centrés en C, il vient

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

où

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = \mathbf{CK} \wedge \mathbf{T} = -b\mathbf{e}_1 \wedge -T\mathbf{e}_r = bT(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_r) = -bT\sin(\varphi - \theta)\mathbf{e}_z$$

et

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \omega = \frac{mb^2}{6}\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_z$$

soit

$$\frac{mb^2}{6}\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_z = -bT\sin(\varphi - \theta)\mathbf{e}_z$$

ou encore, en projetant sur $\mathbf{e}_z$,

$$\frac{mb^2}{6}\ddot{\varphi} = -bT\sin(\varphi - \theta) \qquad (2)$$

v. L'énergie cinétique de la bouteille s'écrit

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{O}} &= \frac{m}{2}\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{m}{2}(a^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}\frac{mb^2}{6}\dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{m}{2}\Big[a^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)\Big] + \frac{mb^2}{12}\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

L'énergie cinétique n'est pas conservée. Le théorème de l'énergie cinétique écrit au point O dans des axes absolus nous apprend en effet que

$$
\begin{aligned}
\dot{T}_{\mathrm{O}} = P_{\mathrm{O}} &= m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} \\
&= -mg\mathbf{E}_z\cdot(a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + b\dot{\varphi}\mathbf{e}_2) - T\mathbf{e}_r\cdot a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = -mg(a\dot{\theta}\sin\theta + b\dot{\varphi}\sin\varphi) \neq 0
\end{aligned}
$$

vi. Projetant (1) selon $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ et tenant compte de

$$
\begin{cases}
\mathbf{e}_1 = \cos(\varphi-\theta)\mathbf{e}_r + \sin(\varphi-\theta)\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{e}_2 = -\sin(\varphi-\theta)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi-\theta)\mathbf{e}_\theta
\end{cases}
$$

on obtient le système de 3 équations scalaires

$$
m\Big[-a\dot{\theta}^2 - b\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\theta) - b\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta)\Big] = mg\cos\theta - T \tag{3}
$$

$$
m\Big[a\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - b\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)\Big] = -mg\sin\theta \tag{4}
$$

$$
\frac{mb^2}{6}\ddot{\varphi} = -bT\sin(\varphi-\theta) \tag{5}
$$

À l'équilibre, ces équations deviennent

$$
\begin{cases}
T = mg\cos\theta \\
mg\sin\theta = 0 \\
T\sin(\varphi-\theta) = 0
\end{cases}
$$

La deuxième équation donne $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Si $\theta = 0$, les autres équations donnent $T = mg$ et $\sin\varphi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.
Si $\theta = \pi$, on obtient $T = -mg$ qui n'est pas compatible avec le fait que la corde soit tendue et est donc à rejeter.

Les positions d'équilibre recherchées sont donc $\theta = 0, \varphi = 0$ et $\theta = 0, \varphi = \pi$.

vii. La linéarisation des équations (3), (4) et (5) autour de la configuration d'équilibre $\theta = \varphi = 0$ est réalisée en considérant

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &\sim \theta, \quad (\theta\to 0) \\
\cos\theta &\sim 1, \quad (\theta\to 0) \\
\sin(\varphi-\theta) &\sim \varphi-\theta, \quad (\varphi-\theta\to 0) \\
\cos(\varphi-\theta) &\sim 1, \quad (\varphi-\theta\to 0)
\end{aligned}
$$

et en négligeant les termes non linéaires en les perturbations et leurs dérivées. On obtient alors

$$
\begin{cases}
T = mg \\
a\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi} + g\theta = 0 \\
\dfrac{mb}{6}\ddot{\varphi} + T(\varphi-\theta) = 0
\end{cases}
$$

soit, en éliminant T,

$$
a\ddot{\theta} + b\ddot{\varphi} + g\theta = 0 \tag{6}
$$

$$
\frac{b}{6}\ddot{\varphi} + g\varphi - g\theta = 0 \tag{7}
$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants du deuxième ordre équivalent à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du quatrième ordre pour l'une ou l'autre des inconnues.

En dérivant deux fois par rapport au temps l'équation (7), on obtient

$$\frac{b}{6}\frac{d^4\varphi}{dt^4}+g\ddot{\varphi}-g\ddot{\theta}=0$$

Il est ensuite possible d'exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de φ en injectant dans (6) l'expression de $g\theta$ issue de (7). On a successivement

$$g\theta=\frac{b}{6}\ddot{\varphi}+g\varphi$$

puis

$$a\ddot{\theta}=-b\ddot{\varphi}-\frac{b}{6}\ddot{\varphi}-g\varphi=-\frac{7b}{6}\ddot{\varphi}-g\varphi$$

et ensuite

$$\frac{b}{6}\frac{d^4\varphi}{dt^4}+g\ddot{\varphi}-g\left(-\frac{7b}{6a}\ddot{\varphi}-\frac{g}{a}\varphi\right)=0$$

c'est-à-dire

$$\frac{b}{6}\frac{d^4\varphi}{dt^4}+g\left(\frac{7b}{6a}+1\right)\ddot{\varphi}+\frac{g^2}{a}\varphi=0$$

Les zéros du polynôme caractéristique associé à cette équation s'obtiennent en résolvant

$$\frac{b}{6}z^4+g\left(\frac{7b}{6a}+1\right)z^2+\frac{g^2}{a}=0$$

Il s'agit d'une équation bicarrée qui admet les solutions

$$z_{1,2}^2=\frac{-g\left(\frac{7b}{6a}+1\right)\pm g\sqrt{\left(\frac{7b}{6a}+1\right)^2-\frac{4b}{6a}}}{\frac{b}{3}}<0$$

c'est-à-dire

$$z_1=\pm i\sqrt{-z_1^2}=\pm i\omega_1 \quad \text{et} \quad z_2=\pm i\sqrt{-z_2^2}=\pm i\omega_2$$

de sorte que

$$\varphi(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+A_2\cos(\omega_2 t)+B_2\sin(\omega_2 t)$$

où A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des constantes.

On obtiendrait de la même manière

$$\theta(t)=\tilde{A}_1\cos(\omega_1 t)+\tilde{B}_1\sin(\omega_1 t)+\tilde{A}_2\cos(\omega_2 t)+\tilde{B}_2\sin(\omega_2 t)$$

où $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{A}_2$ et $\tilde{B}_2$ sont des constantes.

Les petites oscillations de la bouteille autour de la position d'équilibre sont donc bien caractérisées par la combinaison de deux mouvements harmoniques à des fréquences différentes.

Le mouvement résultant est périodique s'il existe une période commune à ces deux mouvements harmoniques, c'est-à-dire si on peut trouver deux entiers m et n tels que

$$m\frac{2\pi}{\omega_1}=n\frac{2\pi}{\omega_2}$$

donc si

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$