Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2020

MECA0003 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en trois fichiers distincts correspondant aux trois questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf et NOM_Prenom_Q3.pdf.*

En cas de problème technique ou de question,
vous pouvez envoyer un mail à mmm@uliege.be ou téléphoner au 04 366 93 13

Question 1

i. Donnez, en justifiant vos réponses, les dimensions des grandeurs suivantes :

   a) la raideur d'un ressort;
   b) le moment statique;
   c) le couple de réaction gyroscopique;
   d) le vecteur de Poisson.

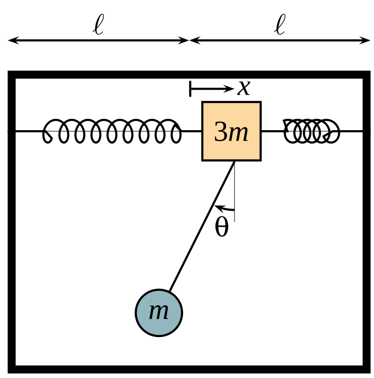
ii. Montrez que si un cylindre homogène est soumis à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport au centre d'inertie est perpendiculaire à l'axe de symétrie, alors le spin est constant.

iii. Sans introduire de développements mathématiques, expliquez pourquoi une raquette de ping-pong ne garde pas son mouvement de rotation initial si on la lance en l'air en lui imprimant un mouvement de rotation initial autour d'un axe contenu dans le plan de la raquette et perpendiculaire au manche.

Question 2

Soit un accéléromètre constitué d'un bloc de masse $3m$ et d'une masse pendulaire de masse m. Les deux masses sont assimilées à des points matériels. Le bloc est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une glissière horizontale. Deux ressorts identiques de longueur naturelle ℓ et de raideur $k = (3/2)m\omega^2$ où $\omega^2 = g/\ell$ (avec $\omega > 0$) sont disposés de part et d'autre du bloc. La masse pendulaire est suspendue au bloc par le biais d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ.

Le mouvement est plan. On repère les positions des deux masses par les variables x et θ représentées sur le dessin ci-dessous. (Les deux ressorts sont à leur longueur naturelle lorsque $x = 0$.)



Les théorèmes généraux de la mécanique permettent de décrire le mouvement des deux masses au moyen du système

$$\begin{cases} 4\ddot{x} + 3\omega^2 x - \ell\,\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\,\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ \\ \ell\,\ddot{\theta} + \ell\,\omega^2\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

i. Déterminez la configuration d'équilibre du système compatible avec les contraintes géométriques correspondant à la représentation schématique ci-dessus.

ii. Étudiez la stabilité de cette configuration d'équilibre.

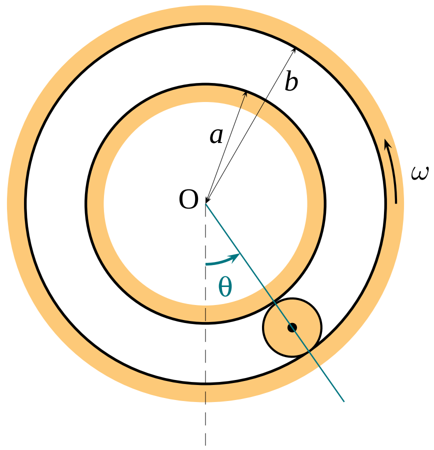
iii. Dans l'hypothèse de petites oscillations, le mouvement du système constitué des deux masses autour de la configuration d'équilibre est-il un mouvement périodique ? Justifiez.

Question 3

Un disque homogène de masse m et de rayon R roule sans glisser entre deux cylindres creux coaxiaux d'axe horizontal et de rayons a et b (où $a < b$ et $b - a = 2R$). Le cylindre intérieur est fixe. Le cylindre extérieur, de masse M, est libre de tourner sans frottement autour de son axe de symétrie de révolution. Le mouvement est plan.

La position du centre d'inertie du disque est repérée par l'angle θ donné sur la figure ci-contre. Tous les autres angles éventuels sont mesurés dans le sens trigonométrique à partir d'une direction fixe. À l'instant initial, le disque est abandonné sans vitesse alors que son centre d'inertie se trouve à la hauteur de l'axe commun aux deux cylindres creux.

Les moments centraux d'inertie d'un disque et d'un cylindre creux de masse m et rayon R par rapport à leur axe de symétrie de révolution sont respectivement donnés par $mR^2/2$ et mR^2.



i. Précisez le système matériel étudié et introduisez les variables cinématiques permettant d'en décrire complètement le mouvement.

ii. Écrivez les deux conditions de roulement sans glissement. Déduisez-en que la vitesse de rotation ω du cylindre extérieur est liée à $\dot{\theta}$ par la relation

$$b\omega = 2(a+R)\dot{\theta}$$

iii. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système. Justifiez.

iv. Relevez toutes les forces extérieures agissant sur le système étudié en précisant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force interne ou externe, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

v. Établissez une intégrale première du mouvement à partir des théorèmes généraux et donnez-en l'interprétation physique.

vi. Étudiez le mouvement absolu du disque sur un diagramme de potentiel.

vii. Écrivez le théorème de la quantité de mouvement pour le disque en explicitant les résultantes cinématiques et dynamiques en fonction des variables cinématiques choisies et des forces.

viii. Écrivez le théorème du moment cinétique pour le cylindre extérieur par rapport à un repère inertiel centré en O. Explicitez les résultantes cinématiques et dynamiques en fonction des variables cinématiques choisies et des forces.

ix. Montrez que les forces de liaison agissant sur le disque sont exclusivement normales au disque (sans composante tangentielle) lorsque celui-ci passe par la verticale inférieure.

SOLUTION TYPE

Question 1

Voir livre de référence.

Question 2

i. La configuration d'équilibre est celle pour laquelle l'accélération est nulle ($\ddot{x} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$) si on abandonne le système sans vitesse ($\dot{x} = 0$, $\dot{\theta} = 0$). À l'équilibre, les équations du mouvement

$$\begin{cases} 4\ddot{x} + 3\omega^2 x - \ell\,\ddot{\theta}\cos\theta + \ell\,\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ \\ \ell\,\ddot{\theta} + \ell\,\omega^2\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

se simplifient donc en $3\omega^2 x = 0$ et $\ell\omega^2\sin\theta = 0$ de sorte que la configuration $(x = 0, \theta = 0)$ est la seule configuratin d'équilibre du système compatible avec les contraintes géométriques.

ii. Les équations décrivant l'évolution de petites perturbations, $x = \varepsilon$ et $\theta = \eta$, s'écrivent

$$\begin{cases} 4\ddot{\varepsilon} + 3\omega^2\varepsilon - \ell\,\ddot{\eta}\cos\eta + \ell\,\dot{\eta}^2\sin\eta = 0 \\ \\ \ell\,\ddot{\eta} + \ell\,\omega^2\sin\eta - \ddot{\varepsilon}\cos\eta = 0 \end{cases}$$

En linéarisant ces équations, on obtient

$$\begin{cases} 4\ddot{\varepsilon} + 3\omega^2\varepsilon - \ell\,\ddot{\eta} = 0 \\ \\ \ell\,\ddot{\eta} + \ell\,\omega^2\eta - \ddot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire

$$\ddot{\varepsilon} = \ell\ddot{\eta} + \ell\omega^2\eta$$

Dérivant deux fois la première équation et y injectant cette expression, il vient successivement

$$4\varepsilon^{(4)} + 3\omega^2\ddot{\varepsilon} - \ell\,\eta^{(4)} = 0$$

$$4\left(\ell\omega^2\ddot{\eta} + \ell\eta^{(4)}\right) - \ell\eta^{(4)} + 3\omega^2(\ell\omega^2\eta + \ell\ddot{\eta}) = 0$$

et

$$3\eta^{(4)} + 7\omega^2\ddot{\eta} + 3\omega^4\eta = 0 \qquad (1)$$

Les solutions de l'équation (1) sont des combinaisons linéaires de solutions fondamentales de la forme $\exp(zt)$ où z vérifie

$$3z^4 + 7\omega^2 z^2 + 3\omega^4 = 0$$

soit

$$z^2 = \frac{-7\omega^2 \pm \sqrt{13}\,\omega^2}{6} < 0$$

Dans ces conditions,

$$z = \pm i\omega\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}}$$

Les arguments des exponentielles étant purement imaginaires, la solution est oscillatoire. L'équilibre est donc (marginalement) stable.

iii. Les petites oscillations autour de la configuration d'équilibre sont une combinaison d'oscillations de pulsations

$$\omega_1 = \omega\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{6}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{6}}$$

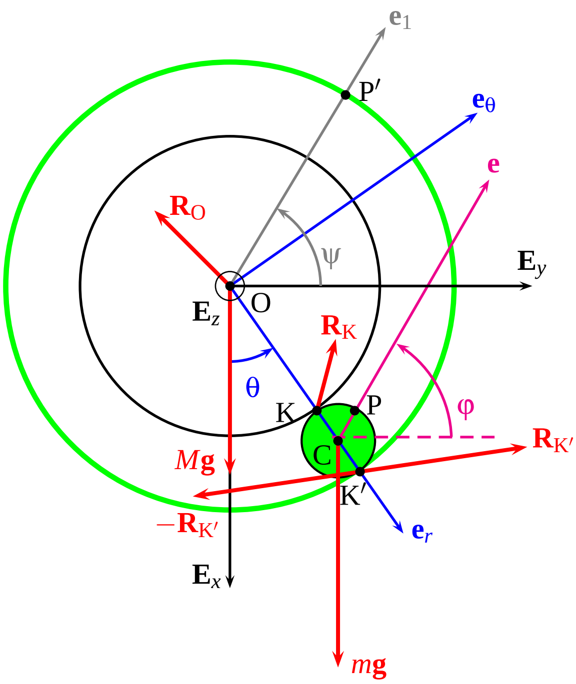
c'est-à-dire de périodes

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{6}{7+\sqrt{13}}} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{6}{7-\sqrt{13}}}$$

Le mouvement résultant n'est pas périodique. Il est en effet impossible de trouver deux entiers p et q tels que $T = pT_1 = qT_2$ puisque

$$\frac{\sqrt{7-\sqrt{13}}}{\sqrt{7+\sqrt{13}}} \quad \text{n'est pas rationnel.}$$

Question 3



i. Le système matériel étudié est constitué du cylindre extérieur de masse M et de rayon b et du disque de masse m et de rayon R. L'angle ψ permet de repérer le mouvement de rotation du cylindre. L'angle θ repère la position du centre d'inertie du disque et l'angle φ décrit la rotation du disque autour de son centre d'inertie. Ces trois angles sont mesurés par rapport à des directions fixes. Ils repèrent donc les mouvements absolus du disque et du cylindre.

ii. Les vecteurs de Poisson du cylindre et du disque sont respectivement donnés par

$$\omega^{cylindre} = \dot{\psi}\mathbf{E}_z \quad \text{et} \quad \omega^{disque} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$$

La condition de roulement sans glissement au point K′ entre le cylindre extérieur et le disque s'écrit

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}^{cylindre} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}^{disque}$$

où

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}^{cylindre} = \dot{\psi}\mathbf{E}_z \wedge b\mathbf{e}_r = \dot{\psi}\, b\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}'}^{disque} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (a+R)\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge R\mathbf{e}_r = \Big(\dot{\theta}(a+R) + \dot{\varphi}R\Big)\mathbf{e}_\theta$$

donc, finalement,

$$\dot{\psi}\, b = \dot{\theta}(a+R) + \dot{\varphi}R \tag{2}$$

La condition de roulement sans glissement au point K entre le cylindre intérieur fixe et le disque s'écrit

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{cylindre} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{disque}$$

où

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{cylindre} = \mathbf{0}$$

et

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{disque} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z \wedge (a+R)\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge (-R\mathbf{e}_r) = \Big(\dot{\theta}(a+R) - \dot{\varphi}R\Big)\mathbf{e}_\theta$$

On a donc

$$\dot{\theta}(a+R) - \dot{\varphi}R = 0 \tag{3}$$

En combinant les conditions de roulement sans glissement (2) et (3) et en notant que $\omega = \dot{\psi}$, on obtient la relation annoncée

$$\dot{\psi}\, b = \omega b = 2\dot{\theta}(a+R) \tag{4}$$

entre la vitesse de rotation du cylindre et $\dot{\theta}$.

iii. Le système est constitué de deux solides en mouvement plan et comprend donc au maximum 6 ddl. La translation du cylindre intérieur est bloquée, ce qui correspond à 2 liaisons et le mouvement de translation du centre d'inertie du disque se fait sur le cercle de rayon $a+R$, ce qui constitue également une liaison. Enfin, les deux conditions de roulement sans glissement apportent deux liaisons supplémentaires de sorte que le système ne possède qu'un seul degré de liberté ($6-2-1-2=1$).

iv. Les forces agissant sur le cylindre sont

- $M\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur le cylindre, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie O du cylindre et dirigée verticalement vers le bas;
- $\mathbf{R}_{\mathrm{O}}$: la force de liaison de direction inconnue agissant au niveau de l'axe du cylindre en O;

- $\mathbf{R}_{K'}$: la force de liaison de direction inconnue agissant (sur le cylindre) au point de contact K′ entre le cylindre et le disque.

Les forces agissant sur le disque sont

- $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur agissant sur le disque, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C du disque et dirigée verticalement vers le bas;
- $\mathbf{R}_K$: la force de liaison de direction inconnue agissant au point de contact K entre le cylindre intérieur et le disque.
- $-\mathbf{R}_{K'}$: la force de liaison de direction inconnue agissant (sur le disque) au point de contact K′ entre le cylindre et le disque.

Les forces $\pm\mathbf{R}_{K'}$ sont des forces internes au système matériel étudié. Toutes les autres forces sont des forces externes.

v. Le théorème de l'énergie cinétique en O s'écrit

$$\dot{T}_O = P_O$$

où

$$T_O = T_O^{cylindre} + T_O^{disque}$$

avec

$$T_O^{cylindre} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{cylindre}\cdot\mathbf{J}_O^{cylindre}\cdot\boldsymbol{\omega}^{cylindre} = \frac{Mb^2}{2}\dot{\psi}^2$$

et

$$T_O^{disque} = \frac{m}{2}\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + T_C^{disque} = \frac{m}{2}\|\dot{\mathbf{s}}_C\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{disque}\cdot\mathbf{J}_C^{disque}\cdot\boldsymbol{\omega}^{disque} = \frac{m(a+R)^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

et où

$$P_O = M\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_O + m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_C + \mathbf{R}_O\cdot\dot{\mathbf{s}}_O + \mathbf{R}_K\cdot\dot{\mathbf{s}}_K^{disque} + \mathbf{R}_{K'}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{K'}^{cylindre} - \mathbf{R}_{K'}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{K'}^{disque}$$

Si on tient compte des deux conditions de roulement sans glissement, de ce que O est un point fixe et du fait que la force de pesanteur est conservative, on a

$$P_O = -\frac{dV_{m\mathbf{g}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\Big[-mg(a+R)\cos\theta\Big]$$

de sorte que le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{dT_O}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[mg(a+R)\cos\theta\Big]$$

Cette équation admet l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$\frac{Mb^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m(a+R)^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2 - mg(a+R)\cos\theta = E = 0 \qquad (5)$$

puisque le système est initialement au repos avec $\theta = \pi/2$.

vi. L'intégrale première (5) peut être exprimée en fonction de la seule variable θ mesurant le mouvement absolu du disque en utilisant (3) et (4), soit

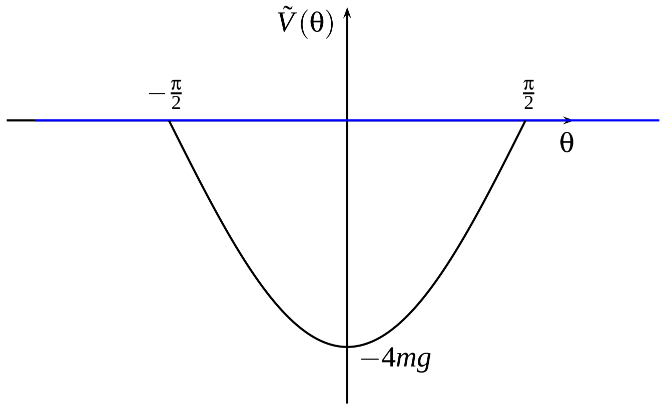
$$2M(a+R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m(a+R)^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m(a+R)^2}{4}\dot{\theta}^2 - mg(a+R)\cos\theta = 0$$

ou encore

$$(8M+3m)(a+R)\dot{\theta}^2 - 4mg\cos\theta = 0 \tag{6}$$

Cette intégrale première peut être étudiée sur le diagramme du potentiel

$$\tilde{V}(\theta) = -4mg\cos\theta$$



Le mouvement du disque consiste en des oscillations périodiques d'amplitude $\pi/2$ autour de la position verticale inférieure.

vii. Le théorème de la quantité de mouvement pour le disque s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = \mathbf{G}^{ext} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}} - \mathbf{R}_{\mathrm{K'}}$$

où

$$\mathbf{N}_{\mathrm{O}} = m\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = m(a+R)\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$$

soit, finalement,

$$m(a+R)\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} - m(a+R)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}} - \mathbf{R}_{\mathrm{K'}} \tag{7}$$

viii. Le théorème du moment cinétique pour le cylindre par rapport à un repère inertiel centré en O s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{O}} = \mathbf{M}_{\mathrm{O}}^{ext} = \mathbf{s}_{\mathrm{K'}} \wedge \mathbf{R}_{\mathrm{K'}} = b\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R}_{\mathrm{K'}}$$

où seule la force $\mathbf{R}_{\mathrm{K'}}$ intervient puisque les autres forces qui agissent sur le cylindre sont appliquées en O. On a

$$\mathbf{H}_{\mathrm{O}} = \mathbf{J}_{\mathrm{O}} \cdot \omega^{cylindre} = Mb^2\dot{\psi}\mathbf{E}_z$$

de sorte que le théorème s'écrit finalement

$$Mb^2\ddot{\psi}\mathbf{E}_z = b\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R}_{\mathrm{K'}} \tag{8}$$

ix. Dérivant l'intégrale première (6) par rapport au temps, on obtient

$$(8M+3m)(a+R)\ddot{\theta} + 2mg\sin\theta = 0$$

de sorte que $\ddot{\theta} = 0$ à la verticale inférieure ($\theta = 0$).

En dérivant (4) par rapport au temps, on obtient aussi que $\ddot{\psi} = 0$ à la verticale inférieure puisque

$$\ddot{\psi}b = 2\ddot{\theta}(a+R)$$

L'équation (8) nous apprend alors que la force de liaison $\mathbf{R}_{K'}$ y est parallèle à $\mathbf{e}_r$, c'est-à-dire, normale au disque.

Dès lors, l'équation (7) donne

$$\mathbf{R}_K = -m(a+R)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r - m\mathbf{g} + \mathbf{R}_{K'}$$

où tous les termes du membre de droite sont dirigés selon $\mathbf{e}_r$ (équivalent à $\mathbf{E}_x$ quand $\theta = 0$).

On en conclut que les deux forces de liaison agissant sur le disque sont exclusivement normales à celui-ci lorsqu'il passe par la verticale inférieure.