Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2023

MATH0003 - MÉCANIQUE RATIONNELLE
EXAMEN

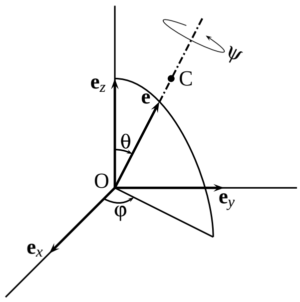
Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Donnez, en justifiant votre réponse, les dimensions des grandeurs suivantes :
   (a) le tenseur central d'inertie d'un solide ;
   (b) le coefficient de frottement dynamique ;
   (c) le coefficient β intervenant dans la loi de variation de la masse de la question II de cet examen ;
   (d) la vitesse relative de rotation de deux solides.

ii. On considère une toupie de masse m présentant une symétrie de révolution d'axe $\mathbf{e}$ en mouvement autour de son sommet O fixe dans le champ de la pesanteur.
   Le centre d'inertie de la toupie se trouve sur l'axe de symétrie de révolution à une distance h du point O. Le tenseur d'inertie de la toupie en O prend la forme

$$\mathbf{J}_O = A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e} \qquad (\natural)$$



   L'orientation de la toupie dans l'espace peut être décrite par la donnée des angles d'Euler :
   - l'angle de *nutation* θ mesure l'inclinaison de l'axe de référence $\mathbf{e}$ par rapport à la verticale $\mathbf{e}_z$;
   - l'angle de *précession* φ mesure l'angle entre le plan formé par $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}_z$ et le plan formé par $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$;
   - l'angle de *rotation propre* ψ mesure la rotation de la toupie autour de l'axe $\mathbf{e}$.

   (a) Justifiez la forme ($\natural$) du tenseur d'inertie de la toupie.
   (b) Exprimez le vecteur de Poisson de la toupie en fonction des angles d'Euler.
   (c) Établissez l'intégrale première de conservation du spin et exprimez celle-ci en fonction des angles d'Euler.

Question II

Une fusée, initialement au repos sur le sol, est lancée dans le champ de pesanteur uniforme $\mathbf{g}$ par l'allumage des moteurs en $t = 0$. La propulsion est assurée par l'éjection des gaz de combustion vers l'arrière de la fusée à la vitesse relative constante $\mathbf{w}$. On note $w = \|\mathbf{w}\| > 0$.

Au démarrage, la vitesse relative d'éjection est dirigée vers le centre de la terre.

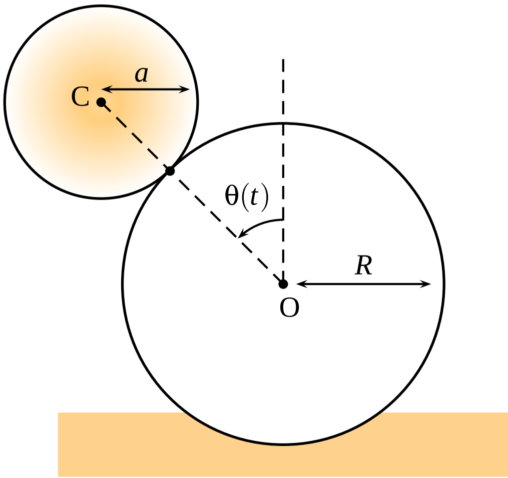
La loi de variation de la masse de la fusée est donnée par $m(t) = m_0 \exp(-\beta t)$. La masse totale du combustible est donnée par γm_0 où $0 < \gamma < 1$.

i. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement de la fusée durant la phase de combustion.
ii. Déterminez la condition sur les paramètres du problème pour que la fusée décolle dès l'allumage des moteurs.
iii. Donnez, en justifiant, la direction du mouvement de la fusée.
iv. Déterminez la loi du mouvement de la fusée durant la phase de combustion.

v. Déterminez la durée t_c de la phase de combustion.

vi. Déterminez la hauteur totale atteinte par la fusée en fonction de β, w, g et t_c.

Question III



On étudie le mouvement plan d'un crayon, assimilé à un cylindre de rayon a, qui roule sans glisser sur la surface extérieure d'un cylindre fixe de rayon R. Le crayon, de masse m, est non homogène mais sa masse est répartie selon une symétrie de révolution. Les axes de symétrie de révolution du crayon et du cylindre fixe sont parallèles entre eux et perpendiculaires au plan du mouvement.

Le moment central d'inertie du crayon par rapport à son axe de symétrie de révolution est $\alpha m a^2$ où $\alpha \in]0,1[$ est une constante strictement positive.

À l'instant initial, le crayon est au repos au sommet du cylindre fixe. Suite à une légère perturbation de cet équilibre, le crayon se met à rouler sans glisser sur le cylindre fixe en faisant un angle $\theta(t)$ par rapport à la verticale supérieure (voir figure). Le coefficient de frottement entre les deux solides est noté μ.

i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du crayon et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) appropriée(s) pour en décrire le mouvement.

ii. Pourquoi peut-on affirmer que $\alpha < 1$?

iii. Déterminez la relation de roulement sans glissement du crayon sur le cylindre fixe.

iv. Relevez toutes les forces agissant sur le crayon en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

v. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement par rapport au point fixe O situé au centre du cylindre fixe.

vi. Écrivez* le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré au centre d'inertie du crayon et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels.

vii. Déterminez une équation algébrique pour l'angle $\theta_\star$ correspondant à l'endroit où le crayon se met à glisser. Montrez que cet angle $\theta_\star$ ne dépend pas des rayons R et a mais bien de la répartition de la masse dans le crayon.

viii. Le crayon roulant sans glisser peut-il décoller du cylindre fixe ? Justifiez.

---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.

Question I

Voir livre de référence.

Question II

i. L'équation différentielle vectorielle décrivant le mouvement de la fusée durant la phase de combustion s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{P}$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de la fusée par rapport au point fixe O, position initiale de la fusée, et où la poussée est donnée par

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{w} = -\beta m_0 \exp(-\beta t)\mathbf{w} = -\beta m\mathbf{w}$$

On a donc

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} - \beta m\mathbf{w}$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{g} - \beta\mathbf{w} \tag{1}$$

ii. La fusée décolle dès l'instant initial si l'allumage des moteurs lui communique une accélération selon la verticale ascendante $\mathbf{E}_z$, *i.e.* si la composante verticale de la poussée est supérieure au poids de la fusée en $t = 0$.

Puisque les gaz de combustion sont initialement éjectés vers le centre de la terre, on a $\mathbf{w}(0) = -w\mathbf{E}_z$ et

$$\ddot{\mathbf{s}}(0) = -g\mathbf{E}_z - \beta(-w\mathbf{E}_z) = (-g + \beta w)\mathbf{E}_z$$

La fusée décollera donc dès l'allumage des moteurs si $\beta w > g$.

iii. Après le décollage de la fusée, son mouvement est rectiligne dans la direction verticale $\mathbf{E}_z$.

En effet, puisque l'accélération initiale de la fusée est verticale et que sa vitesse initiale est nulle, le mouvement initiale de la fusée est dirigé selon $\mathbf{E}_z$.

La fusée ne dévie pas de cette direction dans la suite du mouvement puisque, en raisonnant “de proche en proche”, l'éjection de gaz reste orientée selon $-\mathbf{E}_z$ et toutes les forces en jeu agissent selon $\mathbf{E}_z$.

iv. Le mouvement étant rectiligne, la projection de (1) sur $\mathbf{E}_z$ s'écrit

$$\ddot{z} = -g + \beta w \tag{2}$$

En intégrant, on obtient successivement

$$\dot{z} = (-g + \beta w)t + C_1$$

où la constante $C_1 = 0$ puisque $\dot{z}(0) = 0$, et

$$z = (-g + \beta w)\frac{t^2}{2} + C_2$$

où la constante $C_2 = 0$ puisque $z(0) = 0$ si on place l'origine des axes à la position initiale de la fusée sur le sol.

La loi du mouvement durant la phase de combustion s'écrit donc

$$z(t) = (-g + \beta w)\frac{t^2}{2}$$

On remarque que $z(t) > 0$ si la condition du décollage $\beta w > g$ est vérifiée.

v. Le temps t_c de la combustion est celui auquel le combustible est épuisé et la masse de la fusée est égale à la masse initiale diminuée de la masse totale du combustible. On a donc

$$m(t_c) = m_0 \exp(-\beta t_c) = m_0 - \gamma m_0$$

soit

$$t_c = -\frac{\ln(1-\gamma)}{\beta}$$

vi. À la fin de la phase de combustion, on a

$$z(t_c) = (-g+\beta w)\frac{t_c^2}{2} \quad \text{et} \quad \dot{z}(t_c) = (-g+\beta w)t_c$$

Ces conditions servent alors de conditions initiales à une nouvelle phase du mouvement durant laquelle la fusée a une masse constante $m(t_c) = m_0(1-\gamma)$.

L'équation différentielle vectorielle décrivant le mouvement de la fusée durant cette seconde phase s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g}$$

Le mouvement est donc encore rectiligne selon $\mathbf{E}_z$ puisque la vitesse initiale de cette phase est dirigée selon $\mathbf{E}_z$ et que la seule force en jeu agit également dans cette direction.

Projetant cette équation sur l'axe $\mathbf{E}_z$, on obtient

$$\ddot{z} = -g$$

Posant $t = t_c + t'$, on a

$$\dot{z}(t') = -gt' + C_3$$

où la constante $C_3 = \dot{z}(t_c)$ puisque $\dot{z}(0) = \dot{z}(t_c)$, puis

$$z(t') = -g\frac{t'^2}{2} + \dot{z}(t_c)t' + C_4$$

où la constante $C_4 = z(t_c)$ puisque $z(0) = z(t_c)$.

La loi du mouvement durant la seconde phase du mouvement s'écrit donc

$$z(t') = -g\frac{t'^2}{2} + \dot{z}(t_c)t' + z(t_c)$$

La fusée atteint sa hauteur maximale quand $\dot{z}(t') = 0$, c'est-à-dire en $t'_* = \dot{z}(t_c)/g$.

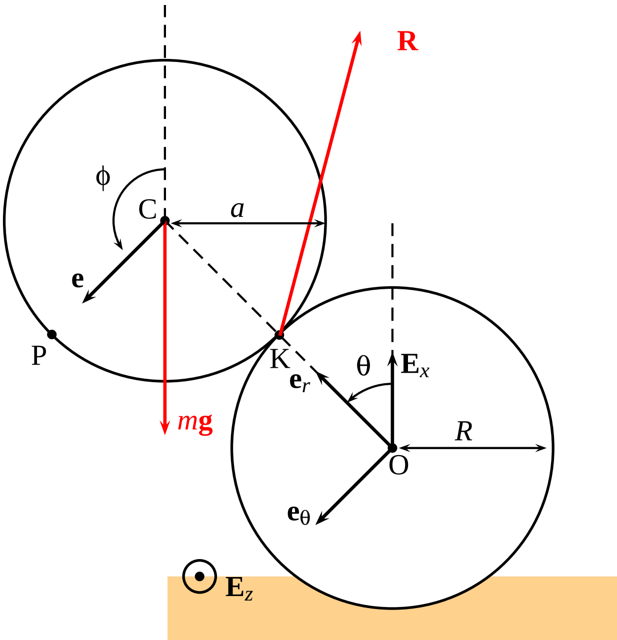
À ce moment,

$$\begin{aligned}
z(t'_*) &= -g\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{z}(t_c)}{g}\right)^2 + \dot{z}(t_c)\frac{\dot{z}(t_c)}{g} + z(t_c) = z(t_c) + \frac{g}{2}\left(\frac{\dot{z}(t_c)}{g}\right)^2 \\
&= (-g+\beta w)\frac{t_c^2}{2} + \frac{g}{2}\left(\frac{(-g+\beta w)t_c}{g}\right)^2 = \frac{t_c^2}{2}\left(-g+\beta w + \frac{(-g+\beta w)^2}{g}\right) \\
&= \frac{t_c^2}{2}\left(\frac{\beta^2 w^2}{g} - \beta w\right) = \frac{\beta w t_c^2}{2}\left(\frac{\beta w}{g} - 1\right) = H_{max}
\end{aligned}$$

Cette réponse est dimensionnellement correcte puisque

$$\left[\frac{\beta w}{g}\right] = \frac{T^{-1}LT^{-1}}{LT^{-2}} = 1 \quad \text{et} \quad [\beta w t_c^2] = T^{-1}LT^{-1}T^2 = L$$

Question III



i. Le crayon en mouvement plan possède au maximum 3 ddl. Le contact avec le cylindre et la condition de roulement sans glissement constituent deux liaisons de sorte que le crayon ne possède qu'un seul degré de liberté.

   Pour décrire son mouvement, on introduit l'angle θ qui mesure la position du centre d'inertie par rapport à la verticale supérieure et l'angle ϕ qui mesure la rotation du crayon autour de son centre d'inertie (voir figure). Ces deux variables sont liées par la condition de roulement sans glissement.

ii. Le moment d'inertie est borné supérieurement par ma^2, valeur qui serait obtenue si toute la masse était située à la distance maximale a de l'axe. Dès lors, on a

$$J_C = \alpha m a^2 < m a^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha < 1$$

iii. Le roulement sans glissement se traduit par la condition

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{crayon}} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{cylindre}} = \mathbf{0}$$

   puisque le cylindre est fixe.

   Le vecteur position d'un point matériel quelconque du pourtour du crayon est donné par (voir figure)

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}} = (R+a)\mathbf{e}_r + a\mathbf{e}$$

   et sa vitesse par

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = (R+a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{e}$$

   où $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{E}_z$ est le vecteur de Poisson du solide. Considérant en particulier la vitesse du point matériel en contact avec le cylindre en K, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = (R+a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + a\dot{\phi}\mathbf{E}_z\wedge(-\mathbf{e}_r) = (R+a)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta - a\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta$$

   de sorte que la condition de roulement sans glissement se traduit par la relation

$$(R+a)\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0 \tag{3}$$

iv. Les forces agissant sur le crayon sont

- la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, force conservative appliquée au centre d'inertie du crayon et dirigée verticalement vers le bas ;
- la force de liaison $\mathbf{R} = N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$ appliquée en K et de direction inconnue dans le plan du mouvement.

v. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = \mathbf{G}$$

soit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où $\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = (R+a)\mathbf{e}_r$ soit

$$m(R+a)\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - m(R+a)\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = -mg\mathbf{E}_x + N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta$$

vi. L'application du théorème du moment cinétique dans un système d'axes centrés au centre d'inertie et parallèles à des axes inertiels conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}}$$

où

$$\mathbf{H}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \alpha m a^2 \dot{\varphi}\, \mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}} = -a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} = -a\mathbf{e}_r \wedge (N\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_\theta) = -aT\mathbf{E}_z$$

Dès lors,

$$\alpha m a^2 \ddot{\varphi}\mathbf{E}_z = -aT\mathbf{E}_z$$

soit

$$\alpha m a \ddot{\varphi} = -T \tag{4}$$

vii. La projection du théorème de la quantité de mouvement sur les axes $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ donne

$$-m(R+a)\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \tag{5}$$

$$m(R+a)\ddot{\theta} = mg\sin\theta + T \tag{6}$$

Utilisant la condition de roulement sans glissement (3) pour éliminer φ de l'équation (4), on obtient

$$T = -\alpha m(R+a)\ddot{\theta}$$

puis, en introduisant cette valeur de T dans (6),

$$m(R+a)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - \alpha m(R+a)\ddot{\theta}$$

soit

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{(R+a)(1+\alpha)}\sin\theta \tag{7}$$

En multipliant par $\dot{\theta}$ cette équation et intégrant par rapport au temps obtient l'intégrale première

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{(R+a)(1+\alpha)}\cos\theta = C$$

où la constante C est déterminée en prenant en compte les conditions $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ correspondant à la situation initiale où le crayon est au repos au sommet du cylindre. Ainsi,

$$C = \frac{g}{(R+a)(1+\alpha)}$$

et

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(R+a)(1+\alpha)}(1-\cos\theta) \tag{8}$$

L'hypothèse de roulement sans glissement n'est valable qui si les composante T et N de la force de liaison en K calculées en faisant cette hypothèse vérifient $|T| \leq \mu|N|$. Le crayon commence donc à glisser quand $|T| = \mu|N|$. On a

$$T = -\alpha m(R+a)\ddot{\theta} = -mg\frac{\alpha}{1+\alpha}\sin\theta$$

et

$$\begin{aligned} N &= -m(R+a)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = -\frac{2mg}{1+\alpha}(1-\cos\theta) + mg\cos\theta \\ &= -\frac{2mg}{1+\alpha} + mg\left(\frac{2}{1+\alpha}+1\right)\cos\theta = -\frac{2mg}{1+\alpha} + mg\frac{3+\alpha}{1+\alpha}\cos\theta \\ &= \frac{mg}{1+\alpha}[-2+(3+\alpha)\cos\theta] \end{aligned}$$

de sorte que l'équation vérifiée par l'angle $\theta_\star$ où le crayon commence à glisser s'écrit

$$\alpha|\sin\theta_\star| = \mu\,|-2+(3+\alpha)\cos\theta_\star|$$

Les valeur de $\theta_\star$ ne dépend pas des rayons a et R mais bien de la répartition de la masse du crayon étudié, c'est-à-dire du paramètre α intervenant dans l'expression du moment d'inertie de celui-ci.

viii. Dans l'hypothèse où il roule sans glisser jusque-là, le crayon décolle du cylindre quand la composante normale N de la force de liaison s'annule. Ceci est incompatible avec la condition $|T| \leq \mu|N|$. Il n'est donc pas possible que le crayon décolle du cylindre alors qu'il roule sans glisser.