Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2022

MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

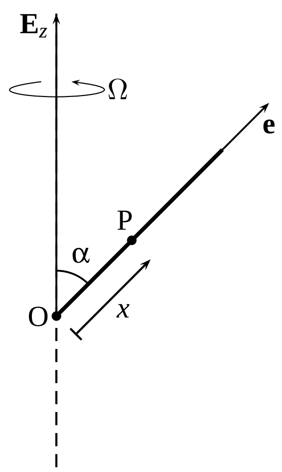
Question I

On considère une toupie présentant une symétrie de révolution d'axe **e** en mouvement autour de son sommet O fixe.

i. Définissez les angles d'Euler permettant de repérer l'orientation de la toupie dans l'espace.
ii. Exprimez le vecteur de Poisson de la toupie en fonction de ceux-ci.
iii. Exprimez et justifiez la forme particulière prise par le tenseur d'inertie de la toupie en O en raison de sa géométrie.
iv. Établissez l'expression de l'énergie cinétique absolue de la toupie en fonction des angles d'Euler.

Question II

On étudie le mouvement d'un point matériel de masse m qui glisse sans frottement dans le champ de la pesanteur sur une tige rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. La liaison est bilatérale. La tige tourne autour de l'axe vertical passant par son extrémité fixe O avec une vitesse angulaire constante Ω. On note **e** le vecteur unitaire dans la direction de la tige et x la distance entre le point P et l'extrémité fixe de la tige.



i. Relevez toutes les forces agissant sur le point matériel et précisez-en les caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).
ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel dans les axes liés à la tige.
iii. Établissez une intégrale première scalaire du mouvement et donnez-en la signification physique éventuelle.
iv. Montrez que cette intégrale première peut s'exprimer sous la forme

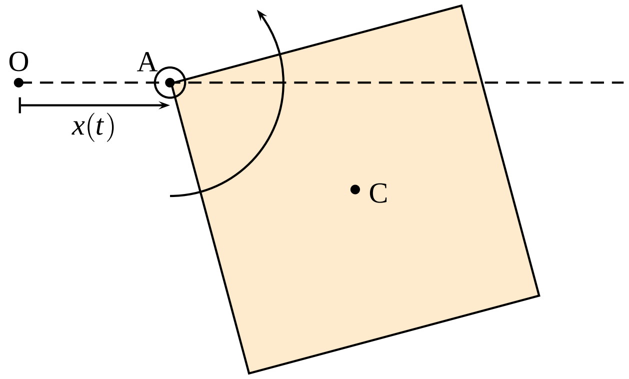
$$\dot{x}^2 + \beta x^2 + \gamma x = \text{constante}$$

où β et γ sont des constantes à déterminer.
v. Déterminez la(les) position(s) d'équilibre relatif et leur stabilité.

Tournez la page.

Question III

On considère une plaque homogène carrée de côté a et de masse m pouvant pivoter librement dans son plan autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la plaque et passant par son coin A. Un mouvement horizontal dans le plan de la plaque est imposé au point A selon une loi $x_A = x(t)$ donnée. Le mouvement est plan.



i. Calculez le moment central d'inertie J_C de la plaque par rapport à un axe perpendiculaire à son plan.
ii. Déterminez le nombre de degrés de liberté de la plaque et introduisez la(les) coordonnée(s) généralisée(s) permettant d'en décrire le mouvement.
iii. Relevez les forces agissant sur la plaque et précisez-en les caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/force de liaison, force conservative).

Cas I. - Point A fixe.

On considère tout d'abord le cas où le point A est fixe.

iv. Par application des théorèmes généraux, écrivez la(les) équation(s) différentielle(s) scalaire(s) permettant de décrire complètement le mouvement de la plaque.
v. Calculez la période T des petites oscillations de la plaque autour de sa position d'équilibre stable.

Cas II. - Point A en mouvement.

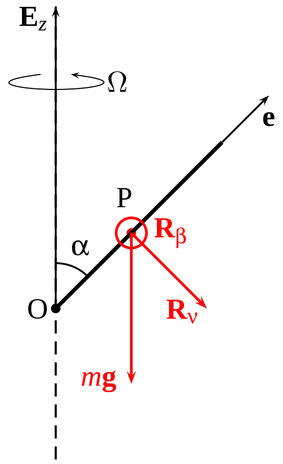
On considère ensuite le cas où $x(t) = X \sin\omega t$ avec $\omega \neq 2\pi/T$.

vi. Par application des théorèmes généraux, écrivez la(les) équation(s) différentielle(s) scalaire(s) permettant de décrire complètement le mouvement de la plaque.
vii. Initialement, la plaque est abandonnée sans vitesse avec son centre d'inertie C situé à la verticale du point A, en dessous de celui-ci. Déterminez la loi du mouvement sous l'hypothèse de petites oscillations. Le mouvement est-il périodique ?

Question I

Voir livre de référence.

Question II



i. Les forces agissant sur le point P sont
   - $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_z$: force appliquée conservative dirigée verticalement vers le bas ;
   - $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta$: force de liaison normale à la tige.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de P par rapport au point fixe O.

Introduisant la dérivée temporelle $\dfrac{\delta}{\delta t}$ dans les axes de vecteur de Poisson $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{E}_z$ liés à la tige, on a

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{s}$$

et

$$\ddot{\mathbf{s}} = \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{s}) = \frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s})\mathbf{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{s}$$

On a alors

$$m\left(\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s})\mathbf{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{s}\right) = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

qui constitue l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel dans les axes liés à la tige.

iii. Multipliant scalairement cette équation par la vitesse relative $\dfrac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}$, tangente à la tige, on élimine la force de Coriolis et la force de liaison :

$$\frac{\delta^2 \mathbf{s}}{\delta t^2} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{s})\left(\mathbf{\Omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right) - \Omega^2 \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right) = \mathbf{g} \cdot \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}$$

Après intégration temporelle, on obtient l'intégrale première scalaire du mouvement

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s})^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{g}\cdot\mathbf{s} + \text{constante} \tag{1}$$

Cette intégrale première ne représente pas la conservation de l'énergie car la force de liaison $\mathbf{R}$ développe une puissance non nulle. On a en effet

$$\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\cdot\left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{s}\right) = \mathbf{R}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{s}) \neq 0$$

iv. Exprimons maintenant l'intégrale première (1) en fonction de la coordonnée généralisée x. On a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s} = x\,\mathbf{e}\\
&\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} = \dot{x}\mathbf{e}, \quad \left\|\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right\|^2 = \dot{x}^2\\
&\Omega^2\|\mathbf{s}\|^2 = \Omega^2 x^2\\
&\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{s} = \Omega\mathbf{E}_z\cdot x\mathbf{e} = \Omega x\cos\alpha\\
&\mathbf{g}\cdot\mathbf{s} = -g\mathbf{E}_z\cdot x\mathbf{e} = -gx\cos\alpha
\end{aligned}$$

et, en remplaçant dans (1),

$$\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2\cos^2\alpha - \Omega^2 x^2 + 2gx\cos\alpha = \text{constante}$$

ou encore

$$\dot{x}^2 - \Omega^2 x^2\sin^2\alpha + 2gx\cos\alpha = \text{constante} \tag{2}$$

de sorte que $\beta = -\Omega^2\sin^2\alpha$ et $\gamma = 2g\cos\alpha$.

v. Les positions d'équilibre relatif sont les points stationnaires du pseudo-potentiel

$$\mathcal{V}(x) = -\Omega^2 x^2\sin^2\alpha + 2gx\cos\alpha$$

c'est-à-dire les solutions de

$$\mathcal{V}'(x) = -2\Omega^2 x\sin^2\alpha + 2g\cos\alpha = 0$$

On obtient

$$x_{\text{éq}} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\sin^2\alpha}$$

Il s'agit d'une position d'équilibre instable puisque le calcul de

$$\mathcal{V}''(x_{\text{éq}}) = -2\Omega^2\sin^2\alpha < 0$$

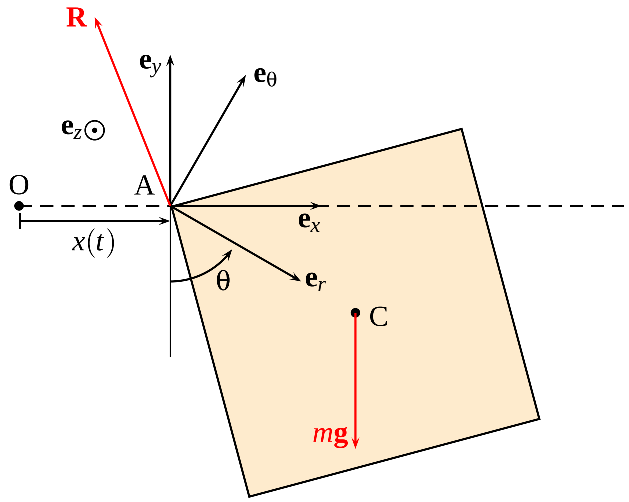
nous indique qu'il s'agit d'un maximum du pseudo-potentiel.

Question III

i. Plaçant des axes cartésiens $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ en C, parallèlement aux côtés de la plaque, et désignant par $\rho = m/a^2$ la masse par unité de surface de la plaque, on a

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{C}} &= \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2 = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left.\frac{x_1^3}{3} + x_2^2x_1\right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_2\\
&= \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^3}{12} + ax_2^2\right)\,dx_2 = \rho\left[\frac{a^3x_2}{12} + a\frac{x_2^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\\
&= \rho\frac{a^4}{6} = \frac{ma^2}{6}
\end{aligned}$$

ii. La plaque est un solide en mouvement plan dont le mouvement d'un point est connu. Elle ne peut donc que pivoter autour de ce point A et possède un seul degré de liberté repéré par l'angle θ (voir figure).



iii. Les forces agissant sur la plaque sont

- $m\mathbf{g}$: la résultante des forces de pesanteur, force appliquée conservative agissant au centre d'inertie C de la plaque et dirigée verticalement vers le bas ;
- $\mathbf{R}$: la force de liaison exercée sur la plaque en A. Elle est de direction inconnue dans le plan du mouvement.

Cas I. - Point A fixe.

iv. Le théorème du moment cinétique au point fixe A s'écrit

$$\frac{d\mathbf{H}_{\mathrm{A}}}{dt} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \mathbf{s}_{\mathrm{C}} \wedge (-mg\mathbf{e}_y) = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r \wedge (-mg\mathbf{e}_y) = -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\mathbf{e}_z$$

puisque

$$\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r$$

Dans cette équation,

$$\mathbf{H}_{\mathrm{A}} = \mathbf{J}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_{\mathrm{A}} \cdot \dot{\theta}\,\mathbf{e}_z = J_{\mathrm{A}}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z$$

où, par le théorème de transport,

$$J_{\mathrm{A}} = J_{\mathrm{C}} + m\frac{a^2}{2} = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{2}{3}ma^2$$

On a donc

$$\frac{2}{3}ma^2\ddot{\theta} = -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a}\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

Cette équation peut également être obtenue en écrivant le théorème de l'énergie au point fixe A :

$$\frac{dT_{\mathrm{A}}}{dt} = P_{\mathrm{A}} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} \cdot (-mg\mathbf{e}_y) + \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{R} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} \cdot (-mg\mathbf{e}_y)$$

puisque $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{A}} = \mathbf{0}$. Dans cette équation,

$$T_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}J_{\mathrm{A}}\dot{\theta}^2 = \frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2$$

et

$$\dot{\mathbf{s}}_C \cdot (-mg\mathbf{e}_y) = \frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \cdot (-mg\mathbf{e}_y) = -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}\sin\theta$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2\right) = -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}\sin\theta$$

qui, après simplification, donne également l'équation (3)

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

v. Les positions d'équilibre de la plaque sont obtenues en annulant $\ddot{\theta}$ dans (3). Il s'agit de $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. La position stable est évidemment $\theta = 0$. Linéarisant (3) autour de cette position d'équilibre, on obtient

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a}\theta = 0$$

Posant

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a}$$

la loi du mouvement s'écrit

$$\theta(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

La période T des petites oscillations de la plaque autour de sa position d'équilibre stable vaut donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$$

Cas II. - Point A en mouvement.

vi. Le point A n'étant plus fixe, on ne peut y écrire aucun théorème.

Le théorème de la quantité de mouvement pour la plaque, rapporté à des axes inertiaux centrés au point fixe O, s'écrit

$$\frac{d\mathbf{N}_O}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

soit

$$m\ddot{\mathbf{s}}_C = -mg\mathbf{e}_y + \mathbf{R}$$

où

$$\mathbf{s}_C = x(t)\mathbf{e}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r$$

et

$$\ddot{\mathbf{s}}_C = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r$$

Vu que $x(t) = X\sin\omega t$, on obtient

$$\mathbf{R} = mg\mathbf{e}_y + m\left(-\omega^2 X\sin\omega t\,\mathbf{e}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r\right)$$

Le théorème du moment cinétique rapporté à des axes parallèles aux axes inertiaux centrés en C, s'écrit

$$\frac{d\mathbf{H}_C}{dt} = \mathbf{M}_C$$

où

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_C\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z = \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_\mathrm{C} &= -\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} \\
&= -\frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_r \wedge \left[mg\mathbf{e}_y + m\left(-\omega^2 X \sin\omega t\ \mathbf{e}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r \right)\right] \\
&= -\frac{a}{\sqrt{2}}mg\sin\theta\,\mathbf{e}_z + m\frac{a}{\sqrt{2}}\omega^2 X \sin\omega t\cos\theta\,\mathbf{e}_z - m\frac{a^2}{2}\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

Finalement, l'équation différentielle permettant de décrire le mouvement de la plaque s'écrit

$$\frac{2a}{3}\ddot{\theta} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{X}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\cos\theta \tag{4}$$

Remarquons que cette équation se réduit à (3) si $X = 0$.

vii. Sous l'hypothèse de petites oscillations autour de la position $\theta = 0$, (4) devient

$$\frac{2a}{3}\ddot{\theta} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\theta + \frac{X}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega^2\omega_0^2\frac{X}{g}\sin\omega t$$

si on pose comme ci-dessus

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène dont la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (θ^h) et d'une solution particulière de l'équation complète (θ^p). D'une part, on a

$$\theta^h(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

D'autre part, vu la forme particulière de l'équation, en notant que $\omega \neq \omega_0$, on peut rechercher une solution particulière du type $C_3\sin\omega t$. Introduisant cette solution dans l'équation, on obtient

$$C_3 = \frac{X}{g}\frac{\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La solution générale est donc

$$\theta(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{X}{g}\frac{\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

Les constantes peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales ($\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$), ce qui donne

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = -\frac{X}{g}\frac{\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{\omega}{\omega_0}$$

et, finalement,

$$\theta(t) = \frac{X}{g}\frac{\omega^2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$$

Le mouvement est périodique si ω/ω_0 est un rationnel.