Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2024

MATH0003 - MÉCANIQUE RATIONNELLE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Établissez la relation entre le moment cinétique d'un solide rapporté à un système d'axes centrés en son centre d'inertie et gardant une orientation constante et le tenseur central d'inertie de ce solide.

ii. Définissez les concepts d'axes principaux centraux d'inertie et de moments principaux centraux d'inertie.

Question II

On considère le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace dans le champ de la pesanteur sur un paraboloïde de révolution fixe décrit en coordonnées cylindriques (avec $\mathbf{e}_z$ dirigé verticalement vers le haut) par l'équation

$$z = \frac{r^2}{p}$$

où $p > 0$ est une constante. La liaison entre le point matériel et la surface de guidage est supposée sans frottement et bilatérale.

À l'instant initial, le point matériel est situé à une hauteur $z = z_0 > 0$ au-dessus du plan de référence et est animé d'un vitesse non nulle $\mathbf{v}_0$ horizontale.

i. Relevez toutes les forces agissant sur le point matériel en indiquant leurs caractéristiques principales (direction, force appliquée ou force de liaison, force conservative).

ii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel.

iii. Déterminez deux intégrales premières scalaires et précisez-en les interprétations physiques éventuelles.

iv. Discutez la nature du mouvement en fonction des paramètres du problème.

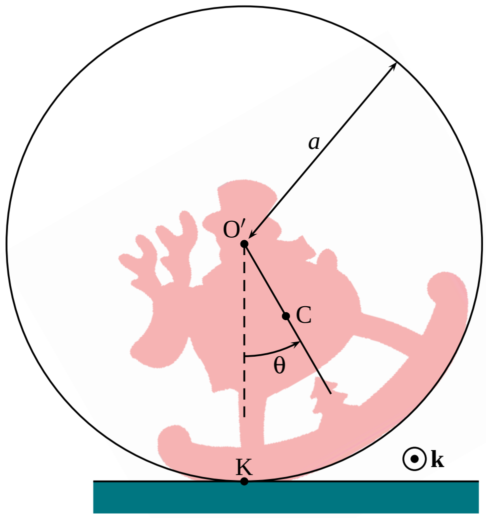
v. Déterminez la vitesse minimale $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ à communiquer au point matériel pour que celui-ci s'élève sur la surface de guidage au-dessus de son niveau de départ z_0.

Tournez la page.

Question III

On considère le mouvement plan d'un cheval à bascule qui roule sans glisser sur un plan horizontal fixe. Le cheval à bascule est assimilé à un solide indéformable de masse m et de centre d'inertie C. Le cheval repose sur le sol via un patin dont le contour extérieur est un arc de cercle de centre O′ et de rayon a en contact avec le plan horizontal en un point K.

On note θ l'angle entre la verticale et O′C (voir figure), d la distance $\|\mathbf{O'C}\|$ et J_C le moment d'inertie pour la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement passant par C.



Dans un premier temps, on étudie les oscillations libres du cheval à bascule, c'est-à-dire sans la force **F** illustrée sur le schéma de gauche.

i. Déterminez le nombre de degrés du solide et introduisez des coordonnées généralisées permettant d'en décrire le mouvement en vous inspirant du schéma proposé.

ii. Relevez toutes les forces agissant sur le solide en indiquant leurs caractéristiques principales (point d'application, direction, force appliquée/de liaison, force conservative).

iii. Déterminez la condition de roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal.

iv. Écrivez* le théorème de l'énergie cinétique par rapport à un repère inertiel et déduisez-en une intégrale première ne faisant intervenir que la variable θ. Précisez l'interprétation physique de cette intégrale première.

v. Déterminez la période des petites oscillations du cheval à bascule autour de $\theta = 0$.

Dans un second temps, on considère que le cheval à bascule est initialement au repos avec $\theta = 0$ et est mis en mouvement par un choc horizontal à une hauteur h au-dessus du plan, c'est-à-dire par une force **F** horizontale exercée pendant un très court instant (voir figure).

vi. Écrivez* le théorème de la quantité de mouvement.

vii. Écrivez* le théorème du moment cinétique par rapport à un repère centré en C et dont les axes sont parallèles à des axes inertiels, sachant que le moment de la force **F** par rapport à C est donné par

$$\mathbf{M}_C^F = F\left[d(1-\cos\theta) - \ell\right]\mathbf{k}$$

où $\ell = h + d - a$ et $\mathbf{k}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement.

viii. Déterminez la hauteur h à laquelle il faut exercer la force **F** mettant en mouvement le cheval à bascule pour que le mouvement initial de celui-ci soit un roulement sans glissement sur le plan horizontal quels que soient le coefficient de frottement sur le plan horizontal et l'intensité de la force **F**.

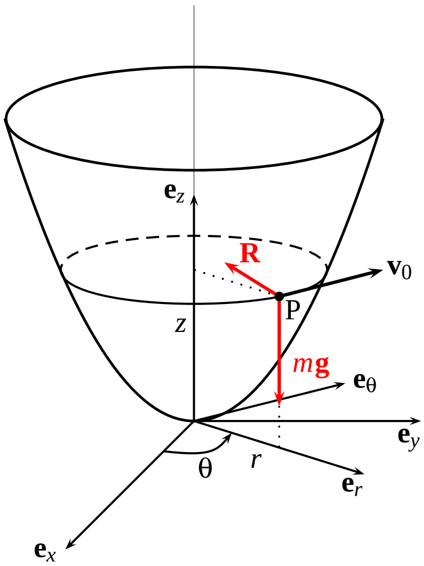
---

* Explicitez, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.

Question I

Voir livre de référence.

Question II



i. Les forces agissant sur le point sont :

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$, la force de pesanteur, force appliquée et conservative ;
- $\mathbf{R}$, force de liaison, perpendiculaire à la surface de guidage en l'absence de frottement.

La force de liaison normale n'a pas de composante tangentielle à la surface de guidage. Comme celle-ci est une surface de révolution autour de l'axe vertical, on a $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ en introduisant les axes de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$.

ii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point matériel s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \tag{1}$$

iii. Multipliant scalairement l'équation (1) par la vitesse absolue du point P, on obtient

$$m\ddot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

puisque la vitesse, tangente à la surface, et la force de liaison, normale à la surface, sont perpendiculaires. On en tire l'intégrale première

$$\frac{1}{2}m||\dot{\mathbf{s}}||^2 - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = E$$

exprimant la conservation de l'énergie du point P.

La constante E peut être déterminée en utilisant les conditions initiales. On a

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

En coordonnées cylindriques, on a

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

de sorte que l'intégrale première de conservation de l'énergie s'exprime sous la forme

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0 \tag{2}$$

Afin d'obtenir une seconde intégrale première, on utilise le fait que la réaction $\mathbf{R}$ ne possède pas de composante selon $\mathbf{e}_\theta$. Puisque l'accélération en coordonnées cylindriques s'exprime par

$$\ddot{\mathbf{s}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

on a, en projetant l'équation (1) selon $\mathbf{e}_\theta$,

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

soit

$$r^2\dot{\theta} = h$$

où h est une constante qui peut être déterminée en utilisant les conditions initiales.
La vitesse initiale s'écrit en coordonnées cylindriques, en toute généralité,

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \dot{r}_0\mathbf{e}_r + r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta + \dot{z}_0\mathbf{e}_z$$

Initialement, la vitesse est horizontale ($\dot{z}_0 = 0$) et donc, puisque

$$z = \frac{r^2}{p} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{z} = \frac{2r\dot{r}}{p} \tag{3}$$

on a aussi $\dot{r}_0 = 0$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = r_0\dot{\theta}_0\mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_0 \qquad \Rightarrow \qquad r_0\dot{\theta}_0 = v_0$$

Utilisant ce résultat, il vient

$$r^2\dot{\theta} = h = r_0 v_0 = \sqrt{pz_0}\,v_0 \tag{4}$$

Cette intégrale première exprime la conservation de la composante verticale du moment cinétique (par unité de masse). On peut en effet vérifier que

$$(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = \left[(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z)\right] \cdot \mathbf{e}_z = r^2\dot{\theta}$$

De façon alternative, on peut obtenir la deuxième intégrale première en multipliant l'équation (1) successivement vectoriellement par $\mathbf{s}$ puis scalairement par $\mathbf{e}_z$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} m\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} &= m\mathbf{s} \wedge \mathbf{g} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{R} \\ &= m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (-g\mathbf{e}_z) + (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (R_r\mathbf{e}_r + R_z\mathbf{e}_z) \\ &= (mgr - rR_z + zR_r)\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

puis

$$m(\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z\right] = 0 \Rightarrow (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{e}_z = h$$

qui exprime la conservation du moment cinétique vertical.

iv. L'équation de la surface de guidage (3) et l'équation (4) permettent d'éliminer les variables z et θ de l'équation (2). On obtient

$$\dot{r}^2\left(1 + \frac{4r^2}{p^2}\right) + \frac{pz_0v_0^2}{r^2} + \frac{2gr^2}{p} = v_0^2 + 2gz_0 \tag{5}$$

Puisque le coefficient multipliant $\dot{r}^2$ est strictement positif, le mouvement peut être étudié à partir du graphe de la fonction

$$\mathcal{V}(r) = \frac{pz_0 v_0^2}{r^2} + \frac{2gr^2}{p}$$

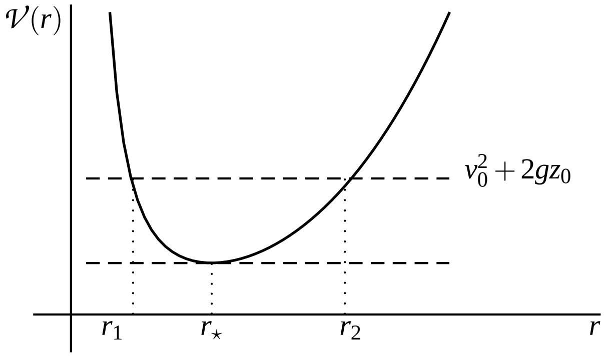
On calcule

$$\lim_{r\to+\infty} \mathcal{V}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0} \mathcal{V}(r) = +\infty$$

et

$$\mathcal{V}'(r) = \frac{-2pz_0 v_0^2}{r^3} + \frac{4gr}{p} = \frac{-2p^2 z_0 v_0^2 + 4gr^4}{r^3 p} = 0 \quad \text{en} \quad r_\star = \sqrt[4]{\frac{p^2 z_0 v_0^2}{2g}}$$

Le 'diagramme de potentiel' présente donc l'allure suivante



- Dans le cas où $v_0^2 + 2gz_0 = \mathcal{V}(r_\star)$, la particule décrit une trajectoire circulaire à la hauteur constante $z_0 = r_\star^2/p$. En vertu de (4), cette trajectoire est décrite à la vitesse constante v_0.
- Dans le cas où $v_0^2 + 2gz_0 > \mathcal{V}(r_\star)$, la particule oscille entre deux plans horizontaux parallèles tout en tournant à vitesse variable sur la surface.

v. Pour que le point matériel s'élève sur la surface de guidage au-dessus de son niveau de départ z_0, il faut que r_0 corresponde au point de réflexion r_1 du puits de potentiel illustré plus haut.

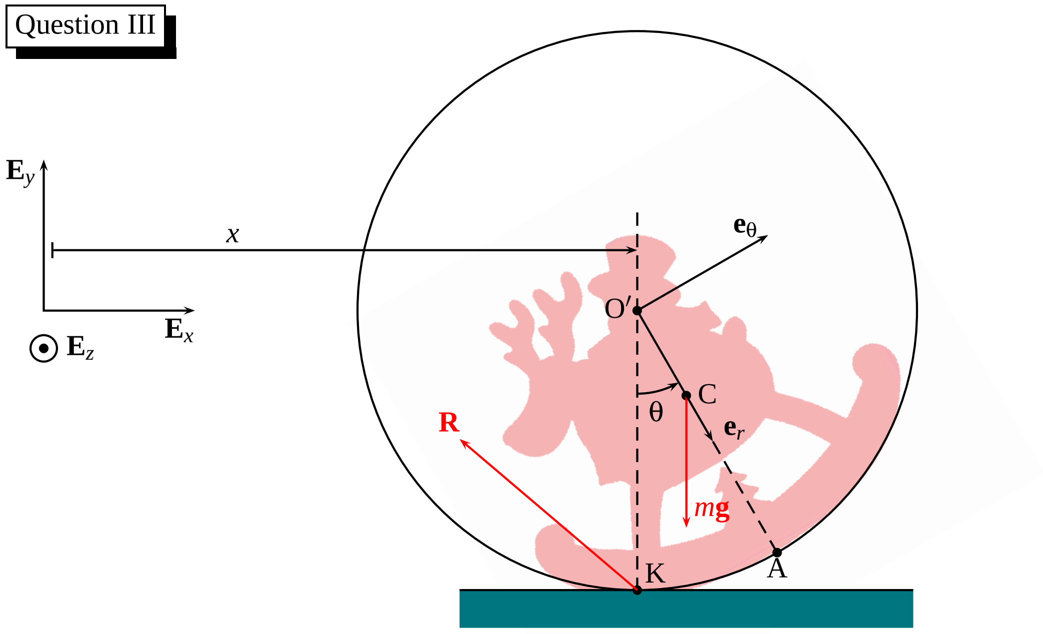
Ce sera le cas si

$$\mathcal{V}'(r_0) = \frac{-2p^2 z_0 v_0^2 + 4gr_0^4}{r_0^3 p} < 0$$

c'est-à-dire si

$$v_0^2 > \frac{4gr_0^4}{2p^2 z_0} = \frac{4gp^2 z_0^2}{2p^2 z_0} = 2gz_0$$

Question III



i. Le solide en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté mais le contact avec le plan horizontal et la condition de roulement sans glissement introduisent 2 liaisons. Le solide possède donc un seul degré de liberté.

   Le mouvement du solide peut être décrit par la coordonnée x mesurant le déplacement horizontal du point O' et par l'angle θ donné dans l'énoncé et mesurant la rotation du solide par rapport à la verticale.

ii. Les forces agissant sur le solide sont :
   - $m\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
   - $\mathbf{R} = N\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x$, force de liaison de direction inconnue dans le plan du mouvement, agissant en K.

iii. Le roulement sans glissement du solide sur le plan horizontal s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du solide et du plan fixe en contact au point K, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{sol}} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{plan}}$$

   Puisque le plan est immobile, on a $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{plan}} = \mathbf{0}$
   Le vecteur position d'un point quelconque du pourtour du solide, par exemple A, s'écrit

$$\mathbf{s}_{\mathrm{A}} = x\mathbf{E}_x + a\mathbf{e}_r$$

   et, puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, on a

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{A}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

   En K, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{E}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{E}_x$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{sol}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + a\dot{\theta}\mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

   Dès lors, le roulement sans glissement du solide sur le plan s'exprime par la relation

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \tag{6}$$

iv. Le théorème de l'énergie cinétique dans les axes inertiels en O s'écrit

$$\dot{T}_{\mathrm{O}} = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = -\frac{d}{dt}(V_{mg})$$

   puisque la force de pesanteur est conservative et que $\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}} = \mathbf{0}$.

On en déduit l'intégrale première de conservation de l'énergie

$$T_{\mathrm{O}} + V_{mg} = E$$

L'énergie cinétique est donnée par

$$T_{\mathrm{O}} = \frac{m}{2}\|\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}}\|^2 + T_{\mathrm{C}}$$

On calcule successivement

$$T_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} J_{\mathrm{C}} \dot{\theta}^2$$

et

$$\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = x\mathbf{E}_x + d\mathbf{e}_r \quad \text{donc} \quad \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = \dot{x}\mathbf{E}_x + d\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{O}} &= \frac{m}{2}(\dot{x}\mathbf{E}_x + d\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot (\dot{x}\mathbf{E}_x + d\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{2} J_{\mathrm{C}} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\mathbf{E}_x \cdot \mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{2} J_{\mathrm{C}} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2} J_{\mathrm{C}} \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

On a aussi

$$V_{mg} = -mgd\cos\theta$$

L'intégrale première s'écrit donc

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{2} J_{\mathrm{C}} \dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = E$$

ou encore, en éliminant $\dot{x}$ grâce à la condition de roulement sans glissement (6),

$$\frac{m}{2}\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta + \frac{J_{\mathrm{C}}}{m}\right)\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = E \tag{7}$$

v. Afin d'étudier les petites oscillations du cheval autour de la position $\theta = 0$, il est nécessaire de dériver l'équation (7) par rapport au temps. On obtient

$$\left(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta + \frac{J_{\mathrm{C}}}{m}\right)\ddot{\theta} + ad\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + gd\sin\theta = 0$$

Les petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = 0$ sont donc décrites par l'équation linéarisée

$$\left[(a-d)^2 + \frac{J_{\mathrm{C}}}{m}\right]\ddot{\theta} + gd\theta = 0$$

obtenue en négligeant le terme en $\dot{\theta}^2$ et en considérant $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$ au voisinage de $\theta = 0$. Cette équation s'écrit sous la forme canonique

$$\ddot{\theta} + \frac{gd}{(a-d)^2 + \frac{J_{\mathrm{C}}}{m}}\theta = 0$$

et indique que les petites oscillations du cheval se font avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{gd}{(a-d)^2 + \frac{J_{\mathrm{C}}}{m}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(a-d)^2 + J_{\mathrm{C}}}{mgd}}$$

vi. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_{\mathrm{O}} = m\ddot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + d\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - d\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F} \tag{8}$$

vii. Le théorème du moment cinétique pour le solide par rapport à un système d'axes d'orientation fixe centré en son centre d'inertie s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_C^{\mathbf{F}} + \mathbf{M}_C^{\mathbf{R}}$$

où

$$\mathbf{M}_C^{\mathrm{F}} = F\left[d(1-\cos\theta) - \ell\right]\mathbf{E}_z$$

et

$$\begin{aligned} M_C^{\mathbf{R}} &= (-d\mathbf{e}_r - a\mathbf{E}_y)\wedge(T\mathbf{E}_x + N\mathbf{E}_y) = -d\mathbf{e}_r\wedge T\mathbf{E}_x - d\mathbf{e}_r\wedge N\mathbf{E}_y + aT\mathbf{E}_z \\ &= (-dT\cos\theta - dN\sin\theta + aT)\mathbf{E}_z \end{aligned}$$

Puisque le vecteur de Poisson du solide est $\dot{\theta}\mathbf{E}_z$, on a par ailleurs

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C\cdot\omega = J_C\dot{\theta}\mathbf{E}_z$$

En projetant le théorème sur l'axe $\mathbf{E}_z$, on obtient donc

$$J_C\ddot{\theta} = (a - d\cos\theta)T - dN\sin\theta + F\left[d(1-\cos\theta) - \ell\right] \tag{9}$$

viii. Le roulement sans glissement est possible si $|T| \leq \mu|N|$.
Pour déterminer si cette condition est rencontrée à l'instant initial, considérons les formes particulières prises par les équations du mouvement (8) et (9) à cet instant où $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{E}_x$. On obtient

$$m(\ddot{x}\mathbf{E}_x + d\ddot{\theta}\mathbf{E}_x) = -m\mathbf{g}\mathbf{E}_y + T\mathbf{E}_x + N\mathbf{E}_y + F\mathbf{E}_x$$

$$J_C\ddot{\theta} = (a-d)T - F\ell$$

De la première équation, on tire, en exploitant la condition de roulement sans glissement pour éliminer x,

$$\begin{cases} m(d-a)\ddot{\theta} = T + F \\ N = mg \end{cases}$$

On peut ensuite éliminer $\ddot{\theta}$ entre les équations en additionnant membre à membre

$$\begin{array}{rcl} -m(a-d)\ddot{\theta} = T + F & & \times J_C \\ J_C\ddot{\theta} = (a-d)T - F\ell & & \times m(a-d) \\ \hline 0 = \left[J_C + m(a-d)^2\right]T + \left[J_C - m\ell(a-d)\right]F & & \end{array}$$

On obtient

$$T = -\frac{J_C - m\ell(a-d)}{J_C + m(a-d)^2}F$$

Pour que la condition $|T| \leq \mu|N|$ soit vérifiée initialement quels que soient μ et F, il faut que $T = 0$, c'est-à-dire

$$J_C - m\ell(a-d) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ell = \frac{J_C}{m(a-d)}$$

Il convient donc de frapper le cheval à bascule à la hauteur

$$h = a - d + \ell = a - d + \frac{J_C}{m(a-d)}$$

Ceci correspond au centre de percussion du système. Comme à la section 5.2 du livre de référence, la hauteur de celui-ci est donnée par

$$h = R + \frac{J_\pi}{mR}$$

où $R = a - d$ est la distance, mesurée verticalement, entre le point de contact et le centre d'inertie du cheval à bascule à l'instant du choc et $J_\pi = J_C$ est le moment central d'inertie.