Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2023

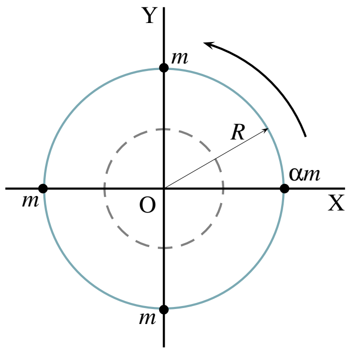
MECA0003-2 - MÉCANIQUE RATIONNELLE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Les calculatrices sont interdites.

Question I

i. On considère l'ensemble des forces de cohésion agissant au sein d'un solide rigide.
   (a) Calculez la résultante de ces forces.
   (b) Calculez le moment résultant de ces forces par rapport à l'origine O d'un repère inertiel.
   (c) Calculez la puissance résultante de ces forces dans un repère inertiel.
   (d) Que pouvez-vous en déduire concernant l'intervention de ces forces dans les différents théorèmes généraux écrits pour un solide rigide dans un repère inertiel ?

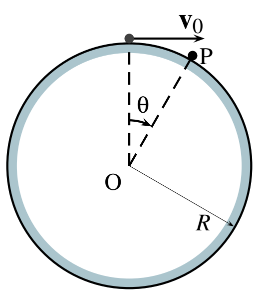
ii. On considère un système tournant à grande vitesse.
   (a) Définissez le concept d'équilibrage statique.
   (b) Définissez le concept d'équilibrage dynamique.
   (c) Soit le système illustré ci-contre constitué de quatre masses ponctuelles disposées à $\pi/2$ l'une de l'autre sur un cercle de rayon R centré sur l'axe de rotation OZ, dans le plan perpendiculaire à cet axe. Initialement, les quatre masses étaient identiques mais, en raison de l'usure, une de celles-ci est réduite à une fraction $\alpha < 1$ de la masse initiale.



   Pour mettre en oeuvre l'équilibrage de ce système, on peut placer des masses additionnelles sur un cercle de rayon $R/2$. Déterminez la masse μ et la position sur le cercle de rayon $R/2$ d'une telle masse additionnelle permettant de réaliser l'équilibrage statique et dynamique du système.

Question II

On considère un point matériel P de masse m se déplaçant sans frottement sur le pourtour extérieur d'un cercle fixe de rayon R situé dans un plan vertical. À l'instant initial, le point matériel est déposé au sommet du cercle et on lui communique une vitesse $\mathbf{v}_0$ tangente au cercle. On repère la position de P par l'angle θ mesuré par rapport à la verticale supérieure.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du point P.

ii. Relevez les forces agissant sur le point P et donnez-en les caractéristiques principales (direction, force conservative, force appliquée ou de liaison).

iii. Écrivez l'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P.

iv. Établissez une intégrale première du mouvement de P et donnez-en la signification physique éventuelle.

v. La liaison entre le point et la courbe de guidage étant unilatérale, déterminez la valeur de l'angle θ correspondant à l'endroit où le point décolle de la courbe dans le cas où $v_0^2 = gR/2$.

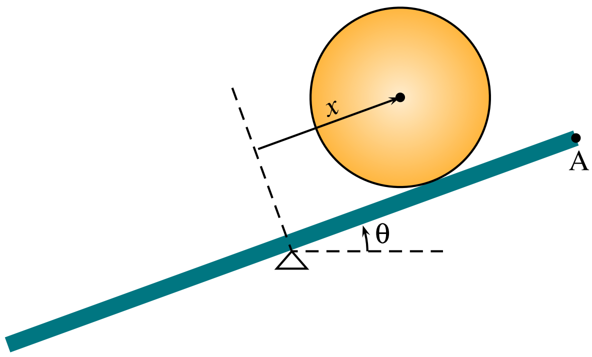
Tournez la page.

Question III

On considère un équilibriste roulant avec son monocycle sur une planche basculante.

Le système est modélisé par un disque homogène de masse m et de rayon a (le centre d'inertie est situé au centre du disque) qui roule sans glisser sur une barre homogène de masse M, de longueur ℓ et d'épaisseur négligeable. La barre pivote librement dans un plan vertical autour de son centre d'inertie supposé fixe. Le mouvement est plan.

Les moment principaux centraux d'inertie du disque et de la barre par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du mouvement valent respectivement $ma^2/2$ et $M\ell^2/12$. On repère le mouvement de la barre par l'angle θ que celle-ci présente avec l'horizontale et la position du disque sur la barre par la variable x mesurant la distance entre le centre d'inertie du disque et la perpendiculaire à la planche passant par son point fixe.



i. Déterminez le nombre de degrés de liberté du système constitué du disque et de la barre. Justifiez. Introduisez les coordonnées généralisées appropriées pour en décrire le mouvement.
ii. Exprimez la vitesse absolue du centre d'inertie du disque.
iii. Exprimez la vitesse absolue du point A de la barre situé à l'extrémité de celle-ci.
iv. Exprimez la relation de roulement sans glissement du disque sur la barre.
v. Relevez les forces agissant sur le disque et la barre et donnez-en les caractéristiques principales (point d'application, direction, force interne ou externe au système, force conservative, force appliquée ou de liaison).
vi. Écrivez le théorème de la quantité de mouvement pour le disque en explicitant, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème
vii. Écrivez le théorème du moment cinétique pour le disque rapporté à son centre d'inertie en explicitant, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.
viii. Écrivez le théorème du moment cinétique pour le système total rapporté à un repère inertiel centré au point fixe de la barre en explicitant, en fonction des variables cinématiques et des forces en jeu, les résultantes cinématique et dynamique intervenant dans ce théorème.
ix. L'énergie du système total est-elle conservée ? Justifiez. L'expression de l'énergie n'est pas attendue.
x. À partir des équations écrites en iv., vi., vii. et viii., montrez que le mouvement du système est décrit par les deux équations différentielles du deuxième ordre suivantes où les constantes strictement positives α et β sont à déterminer :

$$\alpha(a\ddot{\theta} - \ddot{x}) + x\dot{\theta}^2 = g\sin\theta$$
$$(\beta M\ell^2 + \alpha ma^2)\ddot{\theta} - \alpha ma\ddot{x} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta$$

xi. À partir des équations du point précédent (sans remplacer α et β par leur valeur), déterminez la configuration d'équilibre du système physiquement réalisable.
xii. Étudiez la stabilité de cette configuration d'équilibre.

Question I

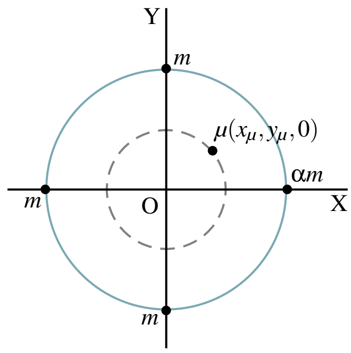
i. Voir livre de référence.

ii. (a) L'équilibrage statique consiste à veiller à ce que le centre d'inertie du système soit situé sur l'axe de rotation.

(b) L'équilibrage dynamique consiste à veiller à ce que l'axe de rotation corresponde à un axe principal d'inertie du système.

(c) Ajoutons une masse μ en $(x_\mu, y_\mu, 0)$ pour réaliser l'équilibrage. L'équilibrage statique demande que le centre d'inertie du système ainsi modifié soit situé à l'origine, soit

$$\begin{aligned} -mR + \alpha mR + \mu x_\mu &= 0 \\ -mR + mR + \mu y_\mu &= 0 \end{aligned} \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} \mu x_\mu &= (1-\alpha)mR \\ \mu y_\mu &= 0 \end{aligned}$$

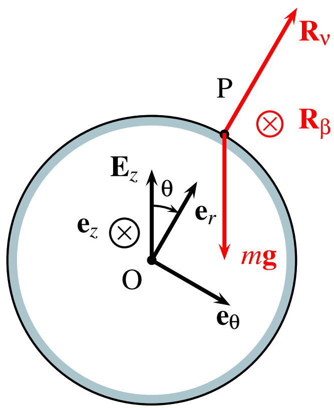


La masse additionnelle doit donc être positionnée sur l'axe OX ($y_\mu = 0$). Comme elle doit être située sur le cercle de rayon $R/2$ et que le calcul ci-dessus montre que $x_\mu > 0$, on en déduit que

$$x_\mu = R/2 \qquad \text{et} \qquad \mu = 2(1-\alpha)m$$

L'équilibrage dynamique consiste à veiller à ce que les produits d'inertie J_{xz} et J_{yz} soient nuls. Puisque toutes les masses sont situées dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, la coordonnée z de chacune d'elles est nulle, y compris celle de la masse additionnelle, de sorte que $J_{xz} = J_{yz} = 0$. L'équilibrage dynamique est donc automatiquement réalisé.

Question II



i. Le point P étant astreint à se déplacer sur une courbe, il possède un seul degré de liberté.

ii. Les forces agissant sur le point P sont

- $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{E}_z$: force appliquée conservative ;
- $\mathbf{R}_\nu = R_\nu \mathbf{e}_r$: force de liaison agissant selon la normale principale au cercle ;
- $\mathbf{R}_\beta = R_\beta \mathbf{e}_z$: force de liaison agissant selon la binormale au cercle.

iii. L'équation différentielle vectorielle du mouvement du point P s'écrit

$$m\ddot{\mathbf{s}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta \tag{1}$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de P par rapport au point fixe O situé au centre du cercle.

iv. Une première façon d'obtenir l'intégrale première est de multiplier scalairement l'équation (1) par la vitesse $\dot{\mathbf{s}}$. On obtient

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot m\ddot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot m\mathbf{g} + \dot{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{R}_\nu + \mathbf{R}_\beta)$$

où le vecteur vitesse tangent à la courbe de guidage est perpendiculaire aux forces de liaison de sorte que l'équation donne

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = m \frac{d}{dt} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})$$

ou encore, après intégration,

$$\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 - m\mathbf{s}\cdot\mathbf{g} = E$$

Cette intégrale première exprime la conservation de l'énergie.
Introduisant les coordonnées polaires dans le plan du cercle, on a

$$\mathbf{s} = R\mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

L'intégrale première s'exprime alors en fonction de θ sous la forme

$$\frac{R^2\dot{\theta}^2}{2} + gR\cos\theta = e$$

où l'énergie par unité de masse e peut être déterminée grâce aux conditions initiales $\theta = 0$ et $R\dot{\theta} = v_0$, soit

$$\frac{R^2\dot{\theta}^2}{2} + gR\cos\theta = \frac{v_0^2}{2} + gR \tag{2}$$

De façon alternative, on peut directement exprimer dans (1) l'accélération en coordonnées polaires. On a

$$\ddot{\mathbf{s}} = R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r$$

et

$$mR\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = -mg\mathbf{E}_z + R_\nu\mathbf{e}_r + R_\beta\mathbf{e}_z \tag{3}$$

En projetant (3) sur $\mathbf{e}_\theta$, on obtient

$$mR\ddot{\theta} = -mg\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{e}_\theta = mg\sin\theta$$

soit, après multiplication par $\dot{\theta}$ et intégration temporelle,

$$\frac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta = C$$

où C peut être déterminée comme ci-dessus.

v. La liaison étant unilatérale et ayant défini R_ν par $\mathbf{R}_\nu = R_\nu\mathbf{e}_r$, les conditions du contact demandent dès lors $R_\nu \geq 0$. Le point décolle du cercle quand R_ν devient négative. La projection de (3) sur $\mathbf{e}_r$ donne

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{e}_r + R_\nu = -mg\cos\theta + R_\nu$$

et donc

$$R_\nu = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Utilisant l'intégrale première (2) pour exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ, on obtient

$$R_\nu = -mR\frac{2}{R^2}\left(\frac{v_0^2}{2} + gR - gR\cos\theta\right) + mg\cos\theta = m\left(-\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

soit, si on tient compte de la vitesse initiale $v_0^2 = gR/2$,

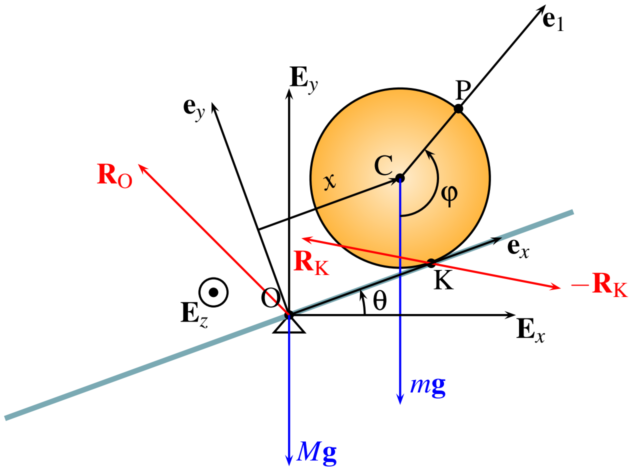
$$R_\nu = m\left(-\frac{g}{2} - 2g + 3g\cos\theta\right) = m\left(-\frac{5g}{2} + 3g\cos\theta\right)$$

La réaction R_ν est bien positive en $t = 0$ ($\theta = 0$) et elle devient négative quand

$$\frac{5g}{2} = 3g\cos\theta \quad \text{soit} \quad \cos\theta = \frac{5}{6} \quad \text{ou} \quad \theta = \arccos\frac{5}{6}$$

Le point décolle donc de la courbe en ce point.

Question III



i. La barre en mouvement plan possède au maximum 3 degrés de liberté. Le point O situé au centre de la barre étant fixe (2 liaisons), celle-ci ne possède qu'un seul degré de liberté de rotation auquel on associe la coordonnée θ.

Le disque en mouvement plan possède également au maximum 3 degrés de liberté. Son contact avec la barre et le roulement sans glissement sur celle-ci introduisent 2 liaisons de sorte que le disque ne possède qu'un seul degré de liberté. Son mouvement peut être décrit par les coordonnées x, mesurant la position du disque sur la barre, et φ, mesurant la rotation du disque autour de son centre d'inertie (voir figure). Au total, le système possède 2 degrés de liberté. Les 3 variables introduites sont reliées par la condition de roulement sans glissement.

ii. Le vecteur position du point C s'écrit

$$\mathbf{s}_{\mathrm{C}} = x\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y$$

où $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ sont liés à la barre et tournent avec celle-ci à la vitesse $\omega^{\text{barre}} = \dot{\theta}\mathbf{E}_z$. On a donc

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\mathbf{e}}_x + a\dot{\mathbf{e}}_y = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y - a\dot{\theta}\mathbf{e}_x = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y$$

iii. Le vecteur position du point A s'écrit

$$\mathbf{s}_{\mathrm{A}} = \frac{\ell}{2}\mathbf{e}_x$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{A}} = \frac{\ell}{2}\dot{\mathbf{e}}_x = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\mathbf{e}_y$$

iv. Le roulement sans glissement du disque sur la barre s'exprime par l'égalité des vitesses instantanées des points matériels du disque et de la barre en contact au point géométrique K à un instant donné, soit

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{disque}} = \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{barre}}$$

Le vecteur position du point de la barre situé en K s'écrit $\mathbf{s}_{\mathrm{K}}^{\text{barre}} = x\mathbf{e}_x$ et sa vitesse se calcule comme celle du point A,

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{barre}} = x\dot{\mathbf{e}}_x = x\dot{\theta}\mathbf{e}_y$$

Le vecteur position d'un point quelconque P du disque s'écrit

$$\mathbf{s}_{\mathrm{P}} = \mathbf{s}_{\mathrm{C}} + a\mathbf{e}_1$$

et sa vitesse

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{P}} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y + a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_1$$

puisque le vecteur de Poisson du disque (et donc aussi du vecteur $\mathbf{e}_1$) est $\omega^{\text{disque}} = \dot{\varphi}\mathbf{E}_z$.

En particulier, pour le point matériel se trouvant en K, on a $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_y$ de sorte que

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{disque}} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y - a\dot{\varphi}\mathbf{E}_z \wedge \mathbf{e}_y = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_x$$

Dès lors, le roulement sans glissement du disque sur la barre s'exprime par la relation

$$x\dot{\theta}\mathbf{e}_y = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y + a\dot{\varphi}\mathbf{e}_x$$

soit

$$\dot{x} - a\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

v. Les forces agissant sur le disque sont

- $m\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur sur le disque, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point C ;
- $\mathbf{R}_\mathrm{K} = T\mathbf{e}_x + N\mathbf{e}_y$, force de liaison de direction inconnue agissant en K dans le plan du mouvement.

Les forces agissant sur la barre sont

- $M\mathbf{g}$, la résultante des forces de pesanteur sur la barre, force appliquée et conservative agissant verticalement vers le bas au point O ;
- $\mathbf{R}_\mathrm{O}$, force de liaison de direction inconnue agissant en O dans le plan du mouvement.
- $-\mathbf{R}_\mathrm{K} = -T\mathbf{e}_x - N\mathbf{e}_y$, force de liaison de direction inconnue agissant en K dans le plan du mouvement.

Les forces $\pm\mathbf{R}_\mathrm{K}$ sont des forces internes au système constitué de la barre et du disque.

vi. Le théorème de la quantité de mouvement pour le disque s'écrit

$$\dot{\mathbf{N}}_\mathrm{O}^{\mathrm{disque}} = m\ddot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_\mathrm{K}$$

Puisque $\dot{\mathbf{s}}_\mathrm{C} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y$, on a

$$m\Big[(\ddot{x} - a\ddot{\theta})\mathbf{e}_x + (\dot{x} - a\dot{\theta})\dot{\theta}\mathbf{e}_y + \dot{x}\dot{\theta}\mathbf{e}_y + x\ddot{\theta}\mathbf{e}_y - x\dot{\theta}^2\mathbf{e}_x\Big] = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x$$

ou

$$m(\ddot{x} - a\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_x + m(2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_y = -mg\mathbf{E}_y + N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x \tag{5}$$

vii. L'application du théorème du moment cinétique pour le disque rapporté à un système d'axes centrés en son centre d'inertie et parallèles à des axes inertiels conduit à

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{C} = \mathbf{M}_\mathrm{C}$$

où

$$\mathbf{H}_\mathrm{C} = \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{disque}} = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\,\mathbf{E}_z$$

et

$$\mathbf{M}_\mathrm{C} = -a\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{R}_\mathrm{K} = -a\mathbf{e}_y \wedge (T\mathbf{e}_x + N\mathbf{e}_y) = aT\mathbf{E}_z$$

Dès lors, en projetant le théorème sur $\mathbf{E}_z$, on obtient

$$\frac{ma}{2}\ddot{\varphi} = T \tag{6}$$

viii. Le théorème du moment cinétique pour le système total rapporté à un repère inertiel s'écrit

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathrm{O}^{\mathrm{barre}} + \dot{\mathbf{H}}_\mathrm{O}^{\mathrm{disque}} = \mathbf{M}_\mathrm{O}$$

D'une part, puisque les autres forces sont des forces internes qui n'interviennent pas dans le théorème ou des forces agissant en O, seule la force de pensanteur agissant au centre du disque intervient et

$$\mathbf{M}_\mathrm{O} = \mathbf{s}_\mathrm{C} \wedge m\mathbf{g} = (x\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y) \wedge (-mg\mathbf{E}_y) = (-mgx\cos\theta + mga\sin\theta)\mathbf{E}_z$$

D'autre part, on a

$$\mathbf{H}_\mathrm{O}^{\mathrm{barre}} = \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \boldsymbol{\omega}^{barre} = \frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}\,\mathbf{E}_z$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\mathrm{O}}^{\text{disque}} &= m\mathbf{s}_{\mathrm{C}} \wedge \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{H}_{\mathrm{C}} \\ &= m(x\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y) \wedge \left[(\dot{x} - a\dot{\theta})\mathbf{e}_x + x\dot{\theta}\mathbf{e}_y\right] + \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\,\mathbf{E}_z \\ &= \left[mx^2\dot{\theta} - ma(\dot{x} - a\dot{\theta}) + \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\right]\mathbf{E}_z\end{aligned}$$

Le théorème s'écrit donc

$$\left[\frac{M\ell^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) - ma(\ddot{x} - a\ddot{\theta}) + \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\right]\mathbf{E}_z = (-mgx\cos\theta + mga\sin\theta)\mathbf{E}_z$$

soit, en projetant sur $\mathbf{E}_z$,

$$\frac{M\ell^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) - ma(\ddot{x} - a\ddot{\theta}) + \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta \tag{7}$$

ix. Les forces appliquées sont conservatives. Les forces de liaison ne développent aucune puissance. En effet, d'une part, la force $\mathbf{R}_{\mathrm{O}}$ agit en un point fixe et, d'autre part, la puissance développée par les forces internes s'annule puisque, en vertu de la condition de roulement sans glissement,

$$\mathbf{R}_{\mathrm{K}} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{disque}} - \mathbf{R}_{\mathrm{K}} \cdot \dot{\mathbf{s}}_{\mathrm{K}}^{\text{barre}} = 0$$

Dès lors, l'énergie du système total est conservée.

x. La condition de roulement sans glissement (4) permet d'éliminer la variable φ. On a

$$a\dot{\varphi} = -\dot{x} + a\dot{\theta}$$

de sorte que (6) s'écrit

$$T = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi} = \frac{m}{2}(-\ddot{x} + a\ddot{\theta})$$

Introduisant cette expression de T dans la projection de l'équation (5) sur $\mathbf{e}_x$, on obtient

$$T = \frac{m}{2}(-\ddot{x} + a\ddot{\theta}) = m(\ddot{x} - a\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2) + mg\mathbf{E}_y \cdot \mathbf{e}_x = m(\ddot{x} - a\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2) + mg\sin\theta$$

soit

$$\frac{3}{2}(a\ddot{\theta} - \ddot{x}) + x\dot{\theta}^2 = g\sin\theta \tag{8}$$

Éliminant ensuite φ de (7), on obtient

$$\frac{M\ell^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) - ma(\ddot{x} - a\ddot{\theta}) + \frac{ma}{2}(-\ddot{x} + a\ddot{\theta}) = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta$$

soit

$$\left(\frac{M\ell^2}{12} + \frac{3}{2}ma^2\right)\ddot{\theta} - \frac{3}{2}ma\ddot{x} + \frac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta \tag{9}$$

Les équations (8) et (9) constituent un système de deux équations différentielles du second ordre pour les inconnues x et θ. Elles correspondent aux équations de l'énoncé à condition de choisir $\alpha = 3/2$ et $\beta = 1/12$.

xi. La configuration d'équilibre est obtenue en annulant toutes les dérivées temporelles dans les équations

$$\begin{cases}\alpha(a\ddot{\theta} - \ddot{x}) + x\dot{\theta}^2 = g\sin\theta \\ (\beta M\ell^2 + \alpha ma^2)\ddot{\theta} - \alpha ma\ddot{x} + \dfrac{d}{dt}(mx^2\dot{\theta}) = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases}0 = g\sin\theta \\ 0 = -mgx\cos\theta + mga\sin\theta\end{cases}$$

La première équation donne $\theta = 0$ puisque, la liaison étant unilatérale, la position $\theta = \pi$ n'est pas physiquement réalisable. La deuxième équation donne alors $x = 0$. Il s'agit de la seule configuration d'équilibre physiquement réalisable de ce système.

xii. Les équations décrivant l'évolution de petites perturbations de la configuration d'équilibre, $\theta = \eta$ et $x = \varepsilon$, s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha(a\ddot{\eta} - \ddot{\varepsilon}) + \varepsilon\dot{\eta}^2 = g\sin\eta \\ (\beta M\ell^2 + \alpha m a^2)\ddot{\eta} - \alpha m a\ddot{\varepsilon} + \dfrac{d}{dt}(m\varepsilon^2\dot{\eta}) = -mg\varepsilon\cos\eta + mga\sin\eta \end{cases}$$

En linéarisant ces équations, on obtient

$$\begin{cases} \alpha(a\ddot{\eta} - \ddot{\varepsilon}) = g\eta \\ (\beta M\ell^2 + \alpha m a^2)\ddot{\eta} - \alpha m a\ddot{\varepsilon} = -mg\varepsilon + mga\eta \end{cases}$$

De la première équation, on tire

$$\alpha\ddot{\varepsilon} = \alpha a\ddot{\eta} - g\eta$$

Injectant cette expression dans la seconde, on a

$$(\beta M\ell^2 + \alpha m a^2)\ddot{\eta} - ma(\alpha a\ddot{\eta} - g\eta) = -mg\varepsilon + mga\eta$$

qui se simplifie en

$$\beta M\ell^2\ddot{\eta} = -mg\varepsilon$$

Dérivant deux fois cette équation par rapport au temps et éliminant ε, on obtient

$$\beta M\ell^2\eta^{(4)} = -mg\ddot{\varepsilon} = -mg\left(a\ddot{\eta} - \frac{g}{\alpha}\eta\right)$$

soit

$$\beta M\ell^2\eta^{(4)} + mga\ddot{\eta} - \frac{mg^2}{\alpha}\eta = 0$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 4 est donné par

$$L(z) = \beta M\ell^2 z^4 + mgaz^2 - \frac{mg^2}{\alpha}$$

Le réalisant

$$\rho = (mga)^2 + 4\beta M\ell^2\frac{mg^2}{\alpha}$$

de cette équation bicarrée est positif. Dès lors, les valeurs de z^2 annulant $L(z)$ sont réelles.
Le produit Π de ces z^2 est négatif, *i.e.*

$$\Pi = -\frac{mg^2}{\alpha\beta M\ell^2} < 0$$

On en déduit que l'une des valeurs de z^2 est négative et l'autre positive ($= z_*^2$). À la valeur positive, on peut associer deux zéros réels $\pm\sqrt{z_*^2}$ de $L(z)$ dont l'un est positif.
Dès lors, l'équilibre est instable. En effet, la loi du mouvement de la perturbation η comprend alors un terme proportionnel à $\mathrm{e}^{\sqrt{z_*^2}\,t}$.