

# MECA0003-2 Mécanique Rationnelle

## Effet gyroscopique

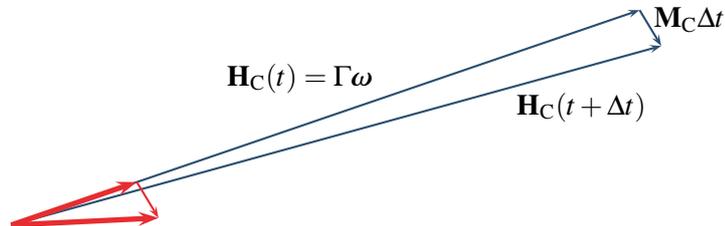
Rigidité gyroscopique . . . . .	2
Applications . . . . .	4
Suspension de Cardan . . . . .	7
Précession gyroscopique . . . . .	9
Équilibre en vélo . . . . .	15
Équilibrage des systèmes tournants . . . . .	16
Équilibrage d'une roue de voiture . . . . .	20

## Stabilisation - Rigidité gyroscopique

Soit un solide en rotation rapide autour de son axe de symétrie

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{H}_C = \mathbf{M}_C dt$$

$$\mathbf{H}_C(t + \Delta t) = \mathbf{H}_C(t) + \mathbf{M}_C \Delta t + o(\Delta t)$$

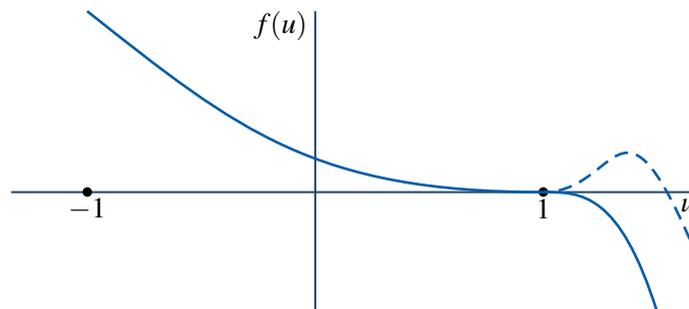


Un solide présentant un très grande vitesse de rotation autour d'un axe de symétrie 'résiste' aux sollicitations extérieures.

MECA0003-2

2018-2019 - 2

## Toupie forte



$$\alpha = \frac{E - 1/2 \Gamma n^2}{mgh} = 1, \quad \beta = \frac{H_z}{\Gamma n} = 1$$

$$b^2 n_*^2 \geq 2 \quad \text{où} \quad b = \frac{\Gamma}{A}, \quad n_* = \frac{n\sqrt{A}}{\sqrt{2mgh}}$$

MECA0003-2

2018-2019 - 3

## Applications

- Rotation de la balle à la sortie d'un canon (canon rayé).



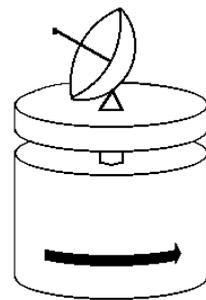
- Stabilisation gyroscopique des navires.
- Ricochet sur l'eau.

MECA0003-2

2018-2019 - 4

## Stabilisation des satellites

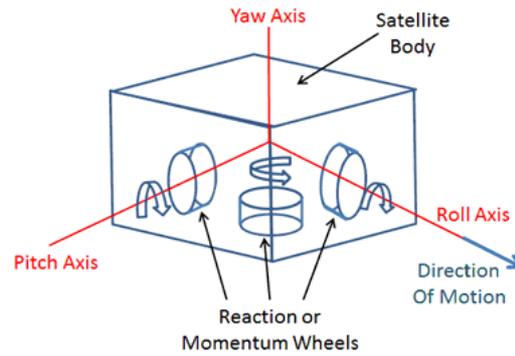
- Stabilisation par spin (e.g. Pioneer 10)
- Dual spin



MECA0003-2

2018-2019 - 5

## Stabilisation 3 axes

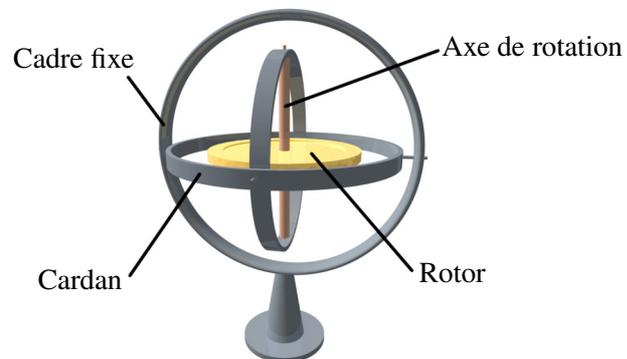


Les perturbations sont transférées à des *roues de réaction* actionnées par des moteurs électriques (aussi pour manoeuvres et pour la stabilisation active de navires, de caméras, . . .)

MECA0003-2

2018-2019 – 6

## Suspension de Cardan

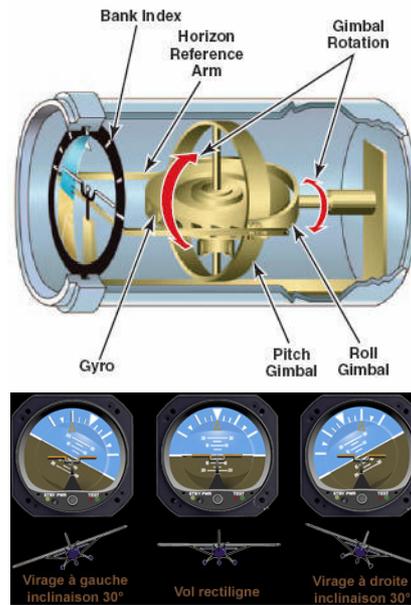


Quel que soit le mouvement du cadre fixe, le rotor (gyroscope) garde une direction constante, ce qui fournit une direction de référence.

MECA0003-2

2018-2019 – 7

## Horizon artificiel

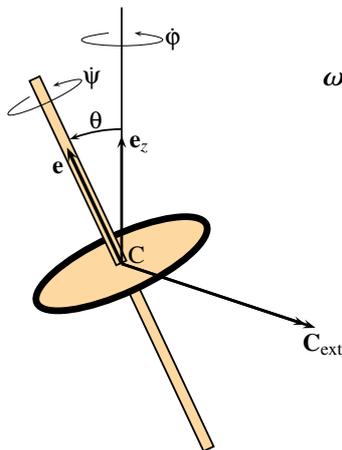


MECA0003-2

2018-2019 - 8

## Précession gyroscopique

Sous quelle sollicitation un solide de révolution présente-t-il une précession uniforme ?



$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \theta = \text{constante} \\ \dot{\phi} = \text{constante} \\ \dot{\psi} = \text{constante} \end{cases}$$

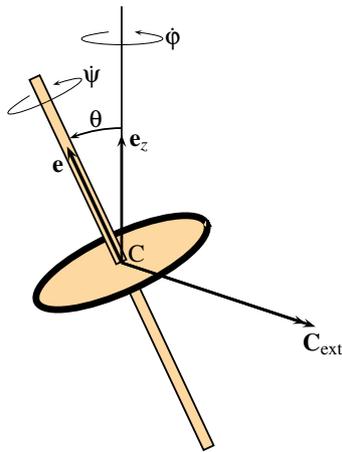
$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \omega = [A\mathbf{I} + (\Gamma - A)\mathbf{e}\mathbf{e}] \cdot \omega = A\omega + (\Gamma - A)(\omega \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = A\dot{\omega} + (\Gamma - A)(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})\omega \wedge \mathbf{e} = A\dot{\psi}\omega \wedge \mathbf{e} + (\Gamma - A)(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})\omega \wedge \mathbf{e}$$

MECA0003-2

2018-2019 - 9

## Précession gyroscopique



$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}$$

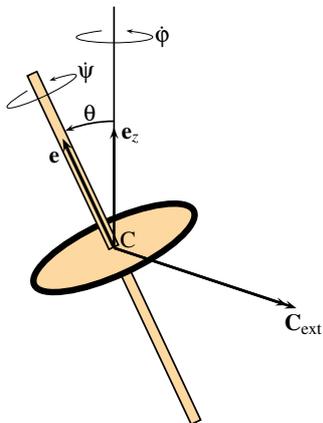
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_C &= A \dot{\psi} \omega \wedge \mathbf{e} \\ &\quad + (\Gamma - A)(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \omega \wedge \mathbf{e} \\ &= \left[ \Gamma \dot{\psi} + (\Gamma - A) \dot{\phi} \cos \theta \right] \dot{\phi} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{C}_{ext} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \Gamma \dot{\psi} \gg, \quad \mathbf{C}_{ext} \approx \Gamma \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \dot{\psi} \mathbf{e}$$

MECA0003-2

2018-2019 - 10

## Précession gyroscopique



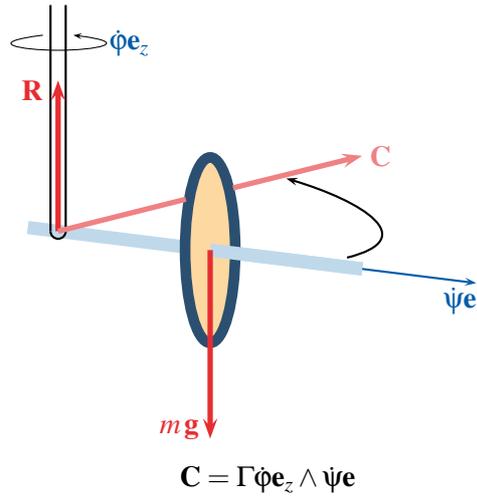
$$\mathbf{C}_{ext} \approx \Gamma \dot{\phi} \mathbf{e}_z \wedge \dot{\psi} \mathbf{e}$$

Au premier ordre, si on applique un couple à un gyroscope en rotation rapide autour de son axe de symétrie  $\mathbf{e}$ , il entame un mouvement de précession tendant à aligner  $\mathbf{e}$  avec la direction de la sollicitation.

MECA0003-2

2018-2019 - 11

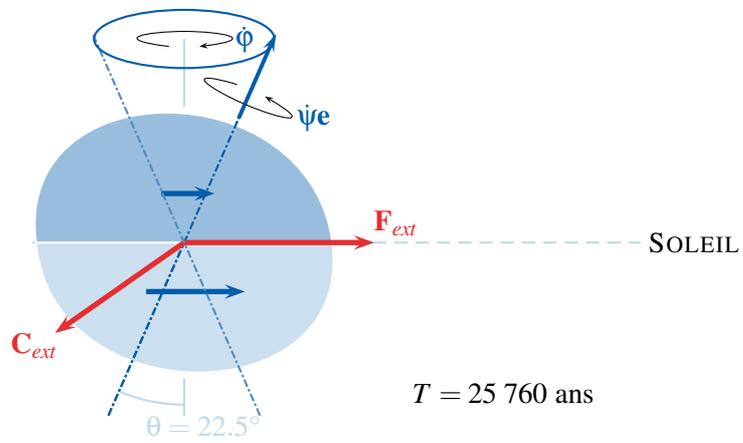
## Précession gyroscopique



MECA0003-2

2018-2019 – 12

## Précession des équinoxes

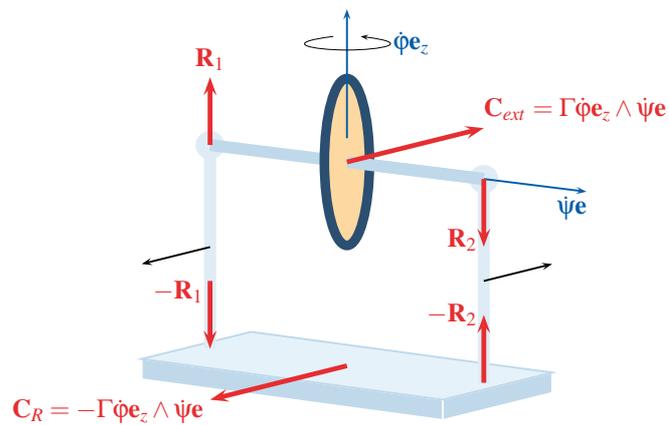


MECA0003-2

2018-2019 – 13

## Couple de réaction gyroscopique

Soit un solide en rotation rapide dont on force la précession...



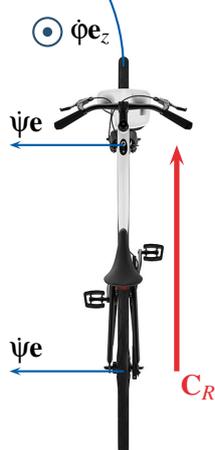
Tout se passe comme-ci le support subissait un couple de réaction gyroscopique tendant à aligner l'axe de rotation avec l'axe de précession

MECA0003-2

2018-2019 - 14

## Équilibre en vélo

Roues en rotation rapide  $\Rightarrow$  stabilisation du vélo en mouvement (gyroscopes d'axes horizontaux)



Virage à gauche = précession d'axe vertical

$\Rightarrow$

Tout se passe comme si (forces fictives) le vélo subissait un couple de réaction gyroscopique

$$C_R = -2\Gamma \dot{\phi}e_z \wedge \dot{\psi}e$$

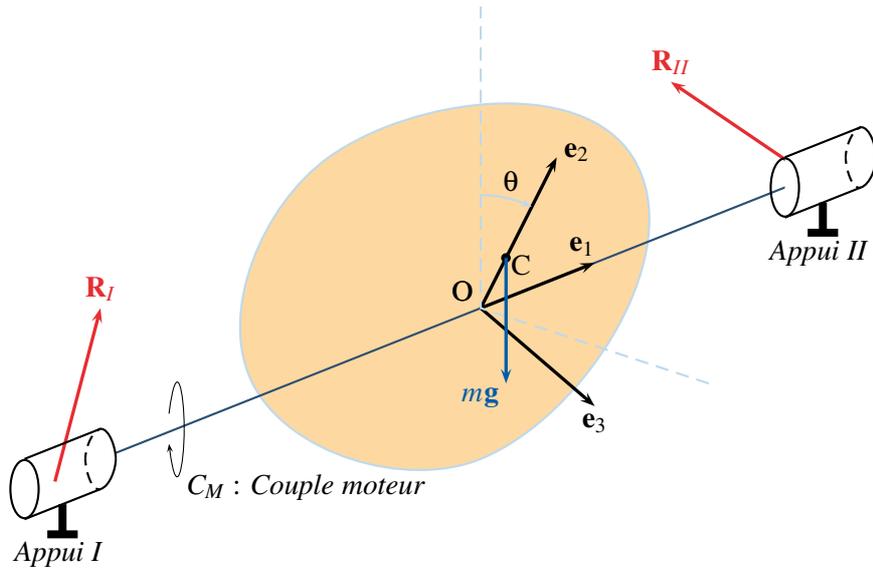
$C_R$  tend à faire basculer le cycliste vers l'extérieur

NB Aussi force centrifuge.

MECA0003-2

2018-2019 - 15

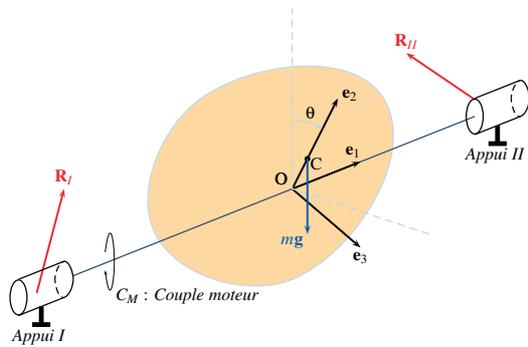
## Équilibrage des systèmes tournants



MECA0003-2

2018-2019 – 16

## Équilibrage statique



$$\mathbf{c} = a\mathbf{e}_2$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_{II}$$

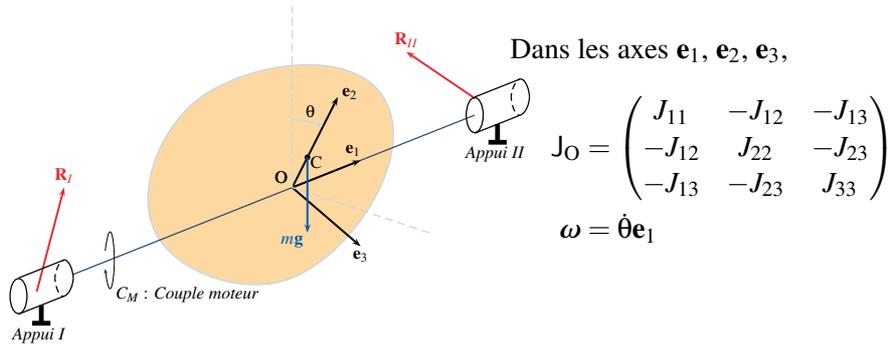
$$m\ddot{\mathbf{c}} = -ma\dot{\theta}^2\mathbf{e}_2 + ma\ddot{\theta}\mathbf{e}_3 = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1 = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_2 - ma\dot{\theta}^2 \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_3 = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_3 + ma\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Équilibrage statique : } a = 0 \\ \text{Centre d'inertie sur l'axe} \end{array}$$

MECA0003-2

2018-2019 – 17

## Équilibrage dynamique



$$\mathbf{H}_O = J_{11} \dot{\theta} \mathbf{e}_1 - J_{12} \dot{\theta} \mathbf{e}_2 - J_{13} \dot{\theta} \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = J_{11} \ddot{\theta} \mathbf{e}_1 - J_{12} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 - J_{13} \ddot{\theta} \mathbf{e}_3 - J_{12} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_3 + J_{13} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_2$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = a \mathbf{e}_2 \wedge m \mathbf{g} + C_M \mathbf{e}_1 + C_R^2 \mathbf{e}_2 + C_R^3 \mathbf{e}_3$$

MECA0003-2

2018-2019 - 18

## Équilibrage dynamique

$$J_{11} \ddot{\theta} \mathbf{e}_1 - J_{12} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 - J_{13} \ddot{\theta} \mathbf{e}_3 - J_{12} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_3 + J_{13} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_2 = a \mathbf{e}_2 \wedge m \mathbf{g} + C_M \mathbf{e}_1 + C_R^2 \mathbf{e}_2 + C_R^3 \mathbf{e}_3$$

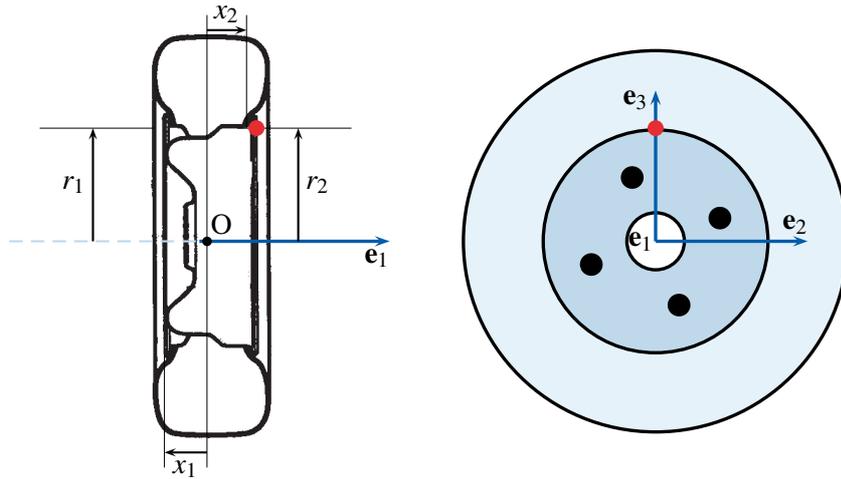
$$\begin{cases} C_M = J_{11} \ddot{\theta} - m a \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_3 \\ C_R^2 = J_{13} \dot{\theta}^2 - J_{12} \ddot{\theta} \\ C_R^3 = -J_{12} \dot{\theta}^2 - J_{13} \ddot{\theta} + m a \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Équilibrage dynamique : Rendre l'axe de rotation principal d'inertie  
( $J_{12} = J_{13} = 0$ )

MECA0003-2

2018-2019 - 19

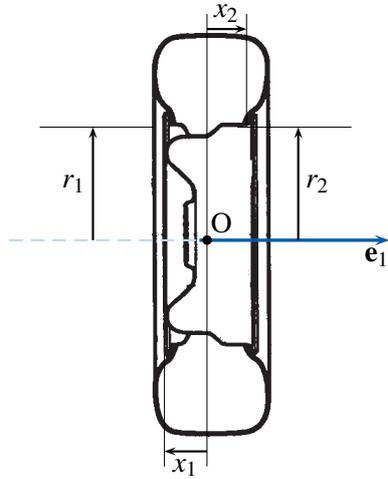
## Équilibrage d'une roue de voiture



MECA0003-2

2018-2019 – 20

## Équilibrage d'une roue de voiture



$\mu_1$  en  $(x_1, y_1, z_1)$

$\mu_2$  en  $(x_2, y_2, z_2)$

$$ma + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = 0$$

$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 = 0$$

$$J_{12} + \mu_1 x_1 y_1 + \mu_2 x_2 y_2 = 0$$

$$J_{13} + \mu_1 x_1 z_1 + \mu_2 x_2 z_2 = 0$$

Mais aussi

$$x_1 = -\ell_1$$

$$x_2 = +\ell_2$$

$$y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$

$$y_2^2 + z_2^2 = r_2^2$$

Solution unique.

MECA0003-2

2018-2019 – 21