

MECA0003-2 Mécanique Rationnelle

Mouvement des solides dans l'espace

La boule de bowling	2
Problème	3
Loi de frottement	4
Théorèmes généraux	5
A. Roulement sans glissement	6
B. Roulement avec glissement	8
Résumé	14
Euler-Poinsot	15
Définition	16
Mouvement général	17
Équations d'Euler	18
Solide de révolution	19
Cas général	22
Stabilité de la rotation	23
Rotation autour d'un axe fixe ?	24
Stabilité	25

Problème

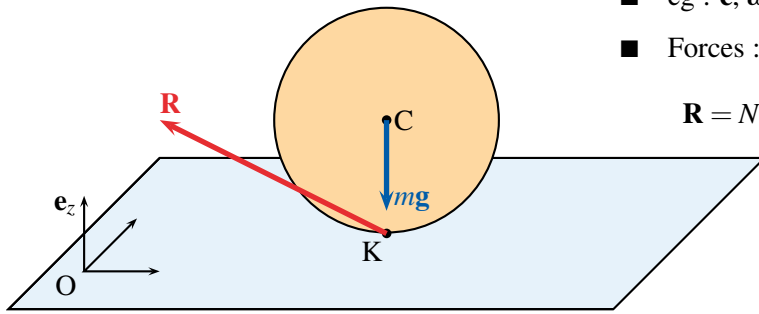
On considère le mouvement d'une boule de bowling parfaitement sphérique (de rayon a) sur une piste parfaitement horizontale.

- ddl : $6 - 1 = 5$
($\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{e}_z = 0$)

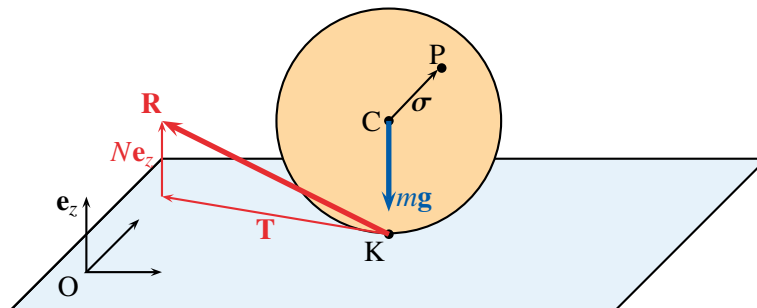
- cg : \mathbf{c}, ω

- Forces : mg, \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = N\mathbf{e}_z + \mathbf{T}$$



Loi de frottement



$$\mathbf{s}_P = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}$$

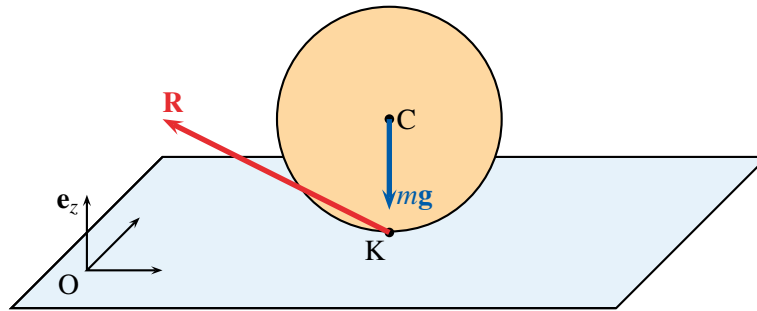
$$\dot{\mathbf{s}}_P = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{v}_K = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (-a\mathbf{e}_z)$$

$$= \dot{\mathbf{c}} - a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_z$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = -\mu|N| \frac{\mathbf{v}_K}{\|\mathbf{v}_K\|} & \text{si } \mathbf{v}_K \neq \mathbf{0} \\ \|\mathbf{T}\| \leq \mu|N| & \text{si } \mathbf{v}_K = \mathbf{0} \end{cases}$$

Théorèmes généraux

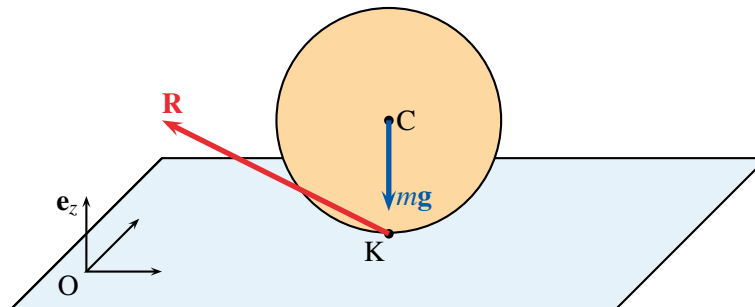


$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{H}}_C = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}) = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{6 équations pour 8 inconnues}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 5

A. Roulement sans glissement



$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{H}}_C = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}) = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} \\ \mathbf{v}_K = \dot{\mathbf{c}} - a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{8 équations pour 8 inconnues}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 6

A. Roulement sans glissement

Sphère :

$$\mathbf{J}_C = \frac{2}{5}ma^2\mathbf{I}$$

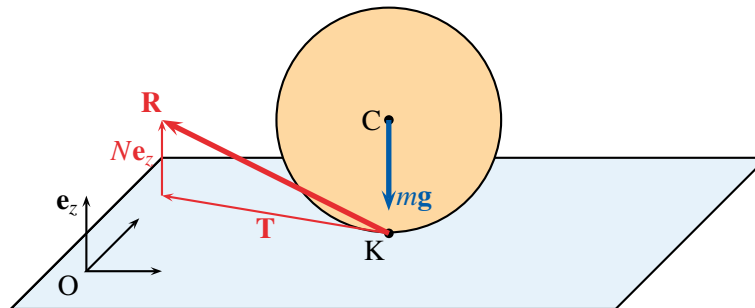
$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} & \Rightarrow \quad \mathbf{R} = m\ddot{\mathbf{c}} - m\mathbf{g} \\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} & \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \\ \mathbf{v}_K = \dot{\mathbf{c}} - a\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_z = \mathbf{0} & \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{c}} = a\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} = -ma\mathbf{e}_z \wedge (\ddot{\mathbf{c}} - \mathbf{g}) \\ &= -ma\mathbf{e}_z \wedge \ddot{\mathbf{c}} = -ma^2\mathbf{e}_z \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{e}_z) \\ &= -ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} + ma^2\mathbf{e}_z(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}_z) = -ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{5}ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \dot{\mathbf{c}} = a\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{c}}_0$$

Mouvement rectiligne à vitesse constante

B. Roulement avec glissement



$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} \\ \mathbf{T} = -\mu|N| \frac{\mathbf{v}_K}{\|\mathbf{v}_K\|} \end{cases} \quad \text{8 équations pour 8 inconnues}$$

B. Roulement avec glissement

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega} = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{R} = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{T} \\ \mathbf{T} = -\mu|N| \frac{\mathbf{v}_K}{\|\mathbf{v}_K\|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{T} \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_K = \dot{\mathbf{c}} - a\omega \wedge \mathbf{e}_z = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_K}{dt} &= \ddot{\mathbf{c}} - a\dot{\omega} \wedge \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{m}\mathbf{T} + \frac{5}{2m}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{T}) \wedge \mathbf{e}_z = \frac{1}{m}\mathbf{T} + \frac{5}{2m}\mathbf{T} - \frac{5}{2m}\mathbf{e}_z(\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{7}{2m}\mathbf{T} = -\frac{7}{2}\mu g \frac{\mathbf{v}_K}{\|\mathbf{v}_K\|} \end{aligned}$$

\mathbf{v}_K garde une orientation \mathbf{e} constante.

B. Roulement avec glissement

$$\mathbf{T} = -\mu|N| \frac{\mathbf{v}_K}{\|\mathbf{v}_K\|} = -\mu mg \mathbf{e}$$

$$m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{T} = -\mu mg \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{1}{2}\mu g t^2 \mathbf{e} + \dot{\mathbf{c}}_0 t + \mathbf{c}_0$$

$$\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega} = -a\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{T} = \mu mg a \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} \Rightarrow \omega = \frac{5\mu g t}{2a} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} + \omega_0$$

La trajectoire n'est pas rectiligne si \mathbf{e} et $\dot{\mathbf{c}}$ ne sont pas parallèles l'un à l'autre, *i.e.* si

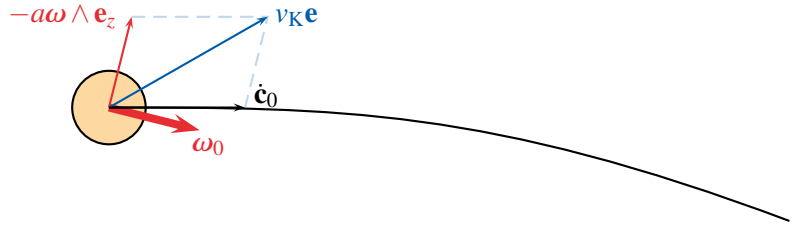
$$\mathbf{0} \neq (\dot{\mathbf{c}}_0 - a\omega_0 \wedge \mathbf{e}_z) \wedge \dot{\mathbf{c}}_0 = a\dot{\mathbf{c}}_0 \wedge (\omega_0 \wedge \mathbf{e}_z) = -a(\dot{\mathbf{c}}_0 \cdot \omega_0) \mathbf{e}_z$$

soit si

$$\dot{\mathbf{c}}_0 \cdot \omega_0 \neq 0$$

Donner de l'effet à la boule

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{2}\mu g t^2 \mathbf{e} + \dot{\mathbf{c}}_0 t + \mathbf{c}_0 \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{c}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$$



Vue du dessus

Fin du glissement

$$\frac{dv_K}{dt} = -\frac{7}{2}\mu g \frac{v_K}{\|v_K\|} \quad \text{soit} \quad \frac{dv_K}{dt} = -\frac{7}{2}\mu g$$

$$v_k = v_k^0 - \frac{7}{2}\mu g t$$

Le glissement cesse après un temps $t^* = \frac{2v_k^0}{7\mu g}$

Ensuite, roulement sans glissement (rectiligne) à vitesse constante.

Fin du roulement sans glissement ?

$$m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

$$\|\mathbf{T}\| = 0 \leq \mu N = \mu mg$$

Le roulement sans glissement continue sans fin.

Aspect énergétique

$$\dot{T}_O = \mathcal{P}_O = \mathbf{mg} \cdot \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{R} = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{T}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{v}_K = \mathbf{0} \\ -\mu mg v_K & \text{si } \mathbf{v}_K \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

Le glissement s'accompagne d'une dissipation d'énergie,
à l'inverse du roulement sans glissement.

Résumé

	<i>Roulement sans glissement</i>	<i>Roulement avec glissement</i>
<i>Équations</i>	Théorèmes généraux + $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$	Théorèmes généraux + $\mathbf{T} = -\mu N \frac{\mathbf{v}_K}{\ \mathbf{v}_K\ }$
<i>Hypothèse</i>	$\ \mathbf{T}\ \leq \mu N$? OUI : OK NON : Phase avec glissement	$\ \mathbf{v}_K\ \neq 0$? OUI : OK NON : Phase sans glissement

Définition

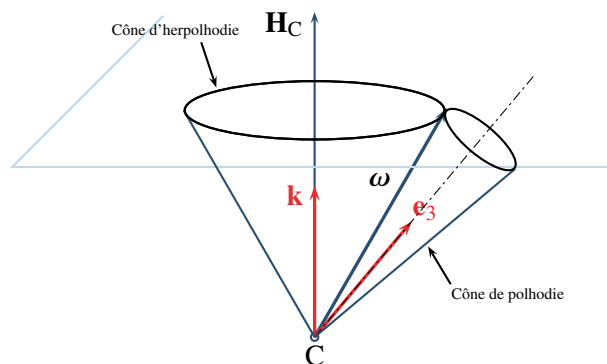
Quel est le mouvement le plus général d'un solide soumis à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport au centre d'inertie est nul ?

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}_0 \text{ constant}$$

$$\dot{T}_C = \mathcal{P}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = T_0 \text{ constant}$$

OK mais à quel type de mouvement ceci correspond-il ?

Mouvement général



$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{H}_C}{\|\mathbf{H}_C\|} : \text{direction invariable}$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T_0$$

(constant)

Le cône de polhodie roule sans glisser sur le cône d'herpolhodie !

Équations d'Euler

= projection du Th \mathbf{H}_C sur les axes principaux d'inertie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{J}_C = J_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = J_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + J_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \omega_3 \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \frac{\delta \mathbf{H}_C}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_C = \mathbf{M}_C$$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

Euler-Poinsot pour solide de révolution

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

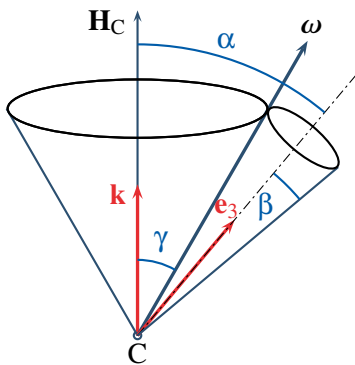
$$\text{CP : } J_1 = J_2, \quad M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_1 - J_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

■ $\omega_3 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3 = n$: spin constant

■ $\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{constante}$
 $\Rightarrow \|\boldsymbol{\omega}\|^2 = \omega_0^2 \text{ constante}$

Euler-Poinsot pour solide de révolution



$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C}{\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{H}_C\|} = \frac{2T_0}{\omega_0 \|\mathbf{H}_0\|}$$

$$\cos \beta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{e}_3\|} = \frac{n}{\omega_0}$$

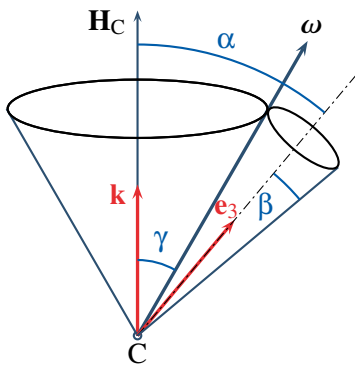
$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{H}_C \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{H}_C\| \|\mathbf{e}_3\|} = \frac{J_3 n}{\|\mathbf{H}_0\|}$$

- Les cônes de polhodie et d'herpolhodie sont des cônes circulaires droits.
- L'axe de symétrie décrit un cône circulaire droit autour de la direction invariable = précession.

MECA0003-2

Novembre 2020 – 20

Précession uniforme



$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_3 = \omega_p \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_3$$

En norme

$$\omega_0 \sin \beta = \omega_p \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{\omega_0 \sin \beta}{\sin \alpha} = \text{constante}$$

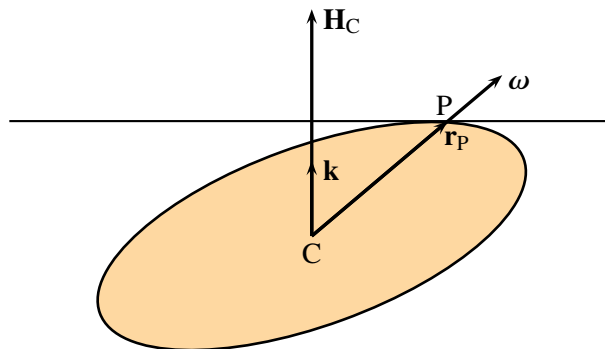
Un solide de révolution soumis à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport au centre d'inertie est nul est en précession uniforme (α et ω_p constants)

MECA0003-2

Novembre 2020 – 21

Cas général

Le mouvement le plus général d'un solide quelconque soumis à un ensemble de forces telles que $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ est un mouvement de roulement sans glissement de l'ellipsoïde d'inertie sur le plan invariant.



MECA0003-2

Novembre 2020 – 22

Stabilité de la rotation

23

Rotation autour d'un axe fixe ?

Quel mouvement de rotation avec $\omega = \text{const.}$ si $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$?

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 = 0 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 = 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 = 0 \end{cases}$$

Équilibre : $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = n$$

Rotation autour d'un axe principal d'inertie

MECA0003-2

Novembre 2020 – 24

Stabilité

$$\begin{cases} \omega_1 = \eta_1 \\ \omega_2 = \eta_2 \\ \omega_3 = n + \eta_3 \end{cases} \quad \text{dans} \quad \begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 = 0 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 = 0 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\eta}_1 + (J_3 - J_2) \eta_2 (n + \eta_3) = 0 \\ J_2 \dot{\eta}_2 + (J_1 - J_3) \eta_1 (n + \eta_3) = 0 \\ J_3 \dot{\eta}_3 + (J_2 - J_1) \eta_1 \eta_2 = 0 \end{cases}$$

Linéarisation

$$\begin{cases} J_1 \dot{\eta}_1 + (J_3 - J_2) n \eta_2 = 0 \\ J_2 \dot{\eta}_2 + (J_1 - J_3) n \eta_1 = 0 \\ J_3 \dot{\eta}_3 = 0 \end{cases}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 25

Stabilité

$$J_3 \dot{\eta}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_3 = \text{constante}$$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\eta}_1 + (J_3 - J_2) n \eta_2 = 0 \\ J_2 \dot{\eta}_2 + (J_1 - J_3) n \eta_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{\eta}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2} n \eta_1$$

$$0 = J_1 \dot{\eta}_1 + (J_3 - J_2) n \dot{\eta}_2 = J_1 \dot{\eta}_1 + (J_3 - J_2) \frac{J_3 - J_1}{J_2} n^2 \eta_1$$

$$\ddot{\eta}_{1,2} + \frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} n^2 \eta_{1,2} = 0$$

$$\frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} n^2 \quad \begin{cases} > 0 & \text{stable} \\ < 0 & \text{instable} \end{cases}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 26

Stabilité

$$\frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} n^2 \quad \begin{cases} > 0 & \text{stable} \\ < 0 & \text{instable} \end{cases}$$

La rotation autour de l'axe par rapport auquel le solide possède la plus grande ou la plus petite inertie est stable. La rotation autour de l'axe correspondant à la valeur intermédiaire du moment d'inertie est instable.

Si le solide de révolution est en rotation autour de son axe de symétrie :

$$J_1 = J_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(J_3 - J_2)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2} n^2 = \frac{(J_3 - J_1)^2}{J_1 J_2} n^2 > 0$$

Stable