

MECA0003-2 Mécanique Rationnelle

Mouvements plans des solides

Dynamique du solide	2
Théorèmes généraux	3
Dépendances entre les théorèmes	4
Th II et III en C	5
Mouvement plan	6
Définition	7
Hypothèse du mouvement plan	9
Pendule plan	10
r.s.gl.	19

Théorèmes généraux

Solide indéformable = 6 ddl max ou 6 inconnues

Th. I $m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}$ 3 équations

Th. II $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$ 3 équations

Th. II_C $\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C$ 3 équations \Rightarrow 11 équations

Th. III $\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$ 1 équation

Th. III_C $\dot{T}_C = \mathcal{P}_C$ 1 équation

\Rightarrow Diversité d'approches possibles pour la résolution des problèmes

Classiquement :

$$\text{Th. I (Mouvement de C) + Th. II}_C \text{ (Mouvement autour de C)}$$

6 équations pour 6 inconnues

Dépendances entre les théorèmes

11 équations pour 6 inconnues \Rightarrow 5 relations entre les théorèmes.

■ Th II_C = (Th. II) - $\mathbf{c} \wedge$ (Th. I) 3 relations scalaires

■ Th III_C = (Th. III) - $\dot{\mathbf{c}} \cdot$ (Th. I) 1 relation scalaire

Relation manquante ?

Pour un solide, le théorème III_C est une conséquence du théorème II_C

Th II et III en C

$$\mathcal{P}_C = \int (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{f}} dm = \int \boldsymbol{\sigma} \wedge \hat{\mathbf{f}} dm \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_C &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\frac{\delta \mathbf{H}_C}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H}_C \right] = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{H}_C}{\delta t} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta}{\delta t} [\mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\delta \mathbf{J}_C}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \\ &= \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \right] = \frac{\delta T_C}{\delta t} \\ &= \frac{dT_C}{dt} \end{aligned}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 5

Mouvement plan

6

Définition

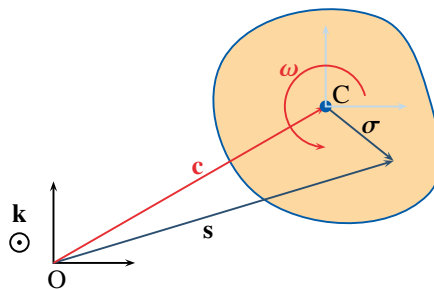
Un solide est en mouvement plan lorsque 3 des ses points non alignés se déplacent à chaque instant dans un même plan.

$$\Rightarrow \forall P \quad \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$$

- 2 ddl de translation : $\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{k} = 0$
- 1 ddl de rotation : $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$
puisque

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{k} = 0 = (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$



MECA0003-2

Novembre 2020 – 7

Conditions nécessaires pour un mouvement plan

$$\text{Th. I} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{k} = 0 \\ m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\text{Th. II}_C \quad \begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \\ \mathbf{H}_C = J_k \omega \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C \end{cases} \quad (\text{Hypothèse}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_C \parallel \mathbf{k}$$

Pour qu'un solide soit en mouvement plan, il faut que la résultante des forces soit dans le plan du mouvement et que le moment résultant par rapport au centre d'inertie soit perpendiculaire à celui-ci

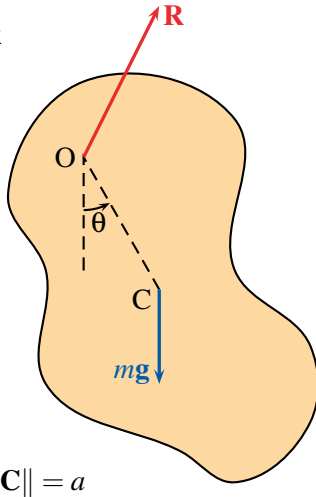
Hypothèse du mouvement plan

Parmi toutes les solutions des équations du mouvement, on considère seulement celles qui correspondent à un mouvement plan.

- On considère au maximum 3 degrés de liberté (2 ddl de translation et un ddl de rotation).
- On ignore les forces (y compris les forces de liaison) qui s'exercent en-dehors du plan du mouvement.

Pendule plan

⊙ \mathbf{k}



$\|\mathbf{OC}\| = a$

- ddl : $3 - 2$ (O fixe) = 1
- coord. gén. : θ
- Forces : $m\mathbf{g}, \mathbf{R}$
- Théorèmes généraux :

$$m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = J_C \ddot{\theta} \mathbf{k} = \mathbf{CO} \wedge \mathbf{R}$$

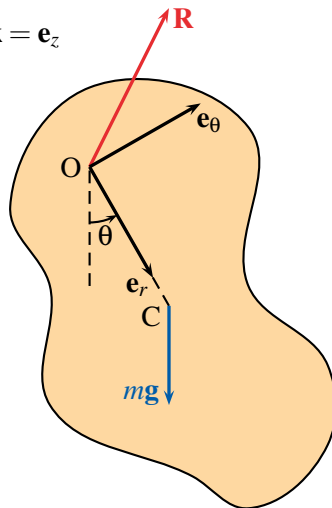
3 équations pour 3 inconnues

MECA0003

Novembre 2020 - 10

Pendule plan

⊙ $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$



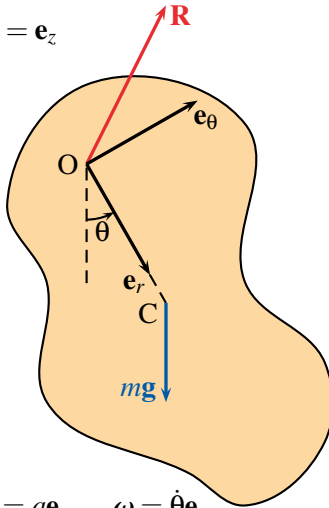
- $m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$
- $\dot{\mathbf{H}}_O = a\mathbf{e}_r \wedge m\mathbf{g}$ ★★★
- $\dot{\mathbf{H}}_C = -a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R}$
- $\dot{T}_O = m\mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{c}}$ ★★★★★
- $\dot{T}_C = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{0} - \dot{\mathbf{c}})$

MECA0003-2

Novembre 2020 - 11

Pendule plan

$$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$



$$\mathbf{c} = a\mathbf{e}_r, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{c}} = a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{T}_O = m \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{c}} \Rightarrow T_O - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{c} = E$$

$$T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

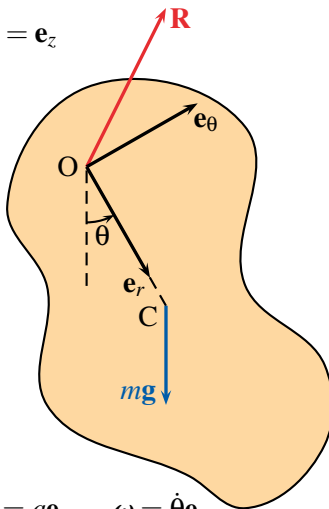
$$\frac{1}{2}(ma^2 + J_C)\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = E$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 12

Approche alternative I

$$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$



$$\mathbf{c} = a\mathbf{e}_r, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{c}} = a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = a\mathbf{e}_r \wedge m\mathbf{g} = -mga \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}_O = m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C$$

$$= ma\mathbf{e}_r \wedge a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + J_C\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$= (ma^2 + J_C)\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$(ma^2 + J_C)\ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$$

$$\frac{1}{2}(ma^2 + J_C)\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = E$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 13

Approche alternative II

$$\mathbf{H}_O = m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C$$

$$= ma\mathbf{e}_r \wedge a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$= (ma^2 + J_C)\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$= \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = J_O\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}(ma^2 + J_C)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$$

$$\mathbf{J}_O = m[\|\mathbf{c}\|^2\mathbf{I} - \mathbf{c}\mathbf{c}] + \mathbf{J}_C$$

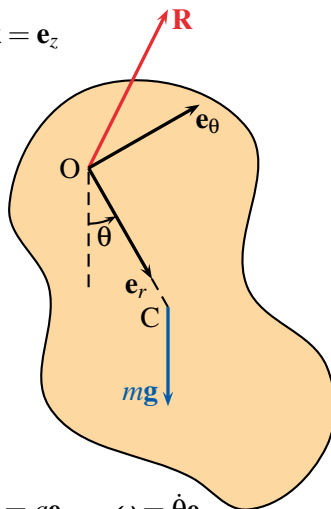
$$J_O = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J}_O \cdot \mathbf{e}_z = m[\|\mathbf{c}\|^2(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_z)^2] + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{e}_z = ma^2 + J_C$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 14

Approche alternative III

$$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$



$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{c}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{H}}_C = -a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_C &= J_C\ddot{\theta}\mathbf{e}_z = -a\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{R} \\ &= -a\mathbf{e}_r \wedge (m\ddot{\mathbf{c}} - m\mathbf{g}) \\ &= (-ma^2\ddot{\theta} - mga \sin \theta)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$(ma^2 + J_C)\ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$$

$$\mathbf{c} = a\mathbf{e}_r, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{c}} = a\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{c}} = -a\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + a\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 15

Pendule simple équivalent

Pour un pendule simple de longueur ℓ :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad \text{où } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$(ma^2 + J_C)\ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{Oscillations à la pulsation } \omega = \sqrt{\frac{mga}{ma^2 + J_C}}$$

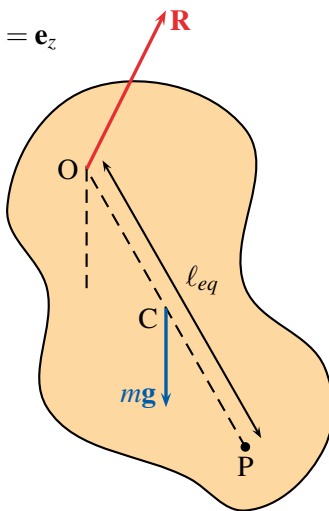
$$\ell_{eq} = \frac{ma^2 + J_C}{ma} = a + \frac{J_C}{ma} > a$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 16

Centre d'oscillation

$$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$



$$\ell_{eq} = \frac{ma^2 + J_C}{ma} = a + \frac{J_C}{ma}$$

\Rightarrow Centre d'oscillations P

Si on suspend le pendule en P

$$a \longrightarrow a' = \ell_{eq} - a = \frac{J_C}{ma}$$

$$\ell'_{eq} = a' + \frac{J_C}{ma'} = \frac{J_C}{ma} + a = \ell_{eq}$$

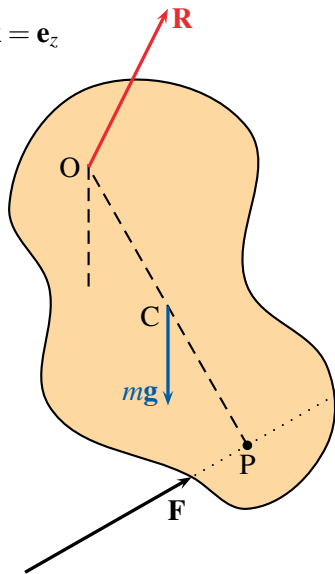
Même pulsation !

MECA0003-2

Novembre 2020 – 17

Centre de percussion

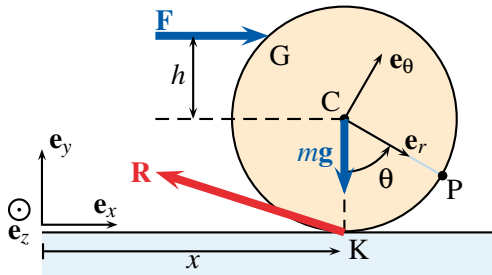
$$\odot \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$



Si on percute le pendule "en P", la réaction en O est indépendante de la force \mathbf{F} appliquée !

Ex. : raquette de tennis, club de golf,...

Centre de percussion et roulement sans glissement



- Boule de rayon a
- ddl : 3-1 ($y_C = a$) = 2
- c.g. : x, θ
- Forces : $mg, \mathbf{R} = N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x$
 $\mathbf{F}(t)$ Force d'impact

$$m\ddot{\mathbf{c}} = mg + \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = N - mg \\ m\ddot{x} = F + T \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C \quad \Rightarrow \quad J_C \ddot{\theta} = aT - Fh$$

$$\dot{\mathbf{s}}_K = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} + a\dot{\theta} = 0 \quad \text{r.s.gl.}$$

Centre de percussion et roulement sans glissement

$$m\ddot{x} = -m a \ddot{\theta} = F + T \quad \times J_C$$

$$J_C \ddot{\theta} = aT - Fh \quad \times ma$$

$$0 = (J_C + ma^2)T + (J_C - mah)F$$

$$\Rightarrow T = -\frac{J_C - mah}{J_C + ma^2}F$$

C.r.s.gl. $|T| \leq \mu_s |N| = \mu_s mg$ OK $\forall F$ si

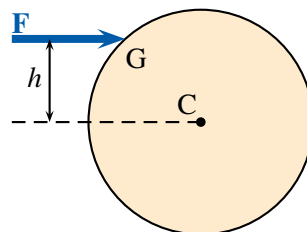
$$h = \frac{J_C}{ma} : \text{centre de percussion}$$

MECA0003-2

Novembre 2020 – 20

Centre de percussion

Pour une sphère : $J_C = \frac{2}{5}ma^2 \Rightarrow h = \frac{J_C}{ma} = \frac{2}{5}a$



MECA0003-2

Novembre 2020 – 21